ETH Zürich
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Angelika Steger
Konstantinos Panagiotou

WS 2004/05
Übungsblatt *

Randomisierte Algorithmen

Aufgabe 1

Jemand hat r Regenschirme, die er für die Wege zwischen Haus und Büro verwendet. Wenn er am Morgen/Abend Zuhause/im Büro ist und es regnet, dann nimmt er einen Regenschirm mit (falls vorhanden), sonst nimmt er keinen mit. Nehmen wir an, dass es unabhängig von der Vergangenheit am Morgen/Abend mit Wahrscheinlichkeit p regnet; es sei $q = 1 - p$.

1. Definieren Sie eine Markov-Kette, die uns helfen soll, den Anteil der Zeit zu bestimmen, an dem die Person nass wird!
2. Berechnen Sie die stationäre Verteilung und den Anteil der Zeit, an dem die Person nass wird!

Aufgabe 2

In dieser Aufgabe betrachten wir den Random Walk auf einem Kreis mit n Knoten: wir starten im Knoten 1 und gehen zum Knoten 2 oder n mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$. Für alle anderen Knoten gilt dasselbe: sind wir im Zustand i, so wechseln wir zum Knoten $i+1 \mod n$ oder $i-1 \mod n$ mit gleicher Wahrscheinlichkeit. Der Walk wird beendet, sobald jeder Knoten mindestens einmal besucht wurde. Sei

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{falls } i\text{–ter Knoten der } \textit{letzte} \text{ ist, der zum ersten Mal besucht wird} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

Berechnen Sie $\Pr[X_i = 1]$ für $1 \leq i \leq n$!

Aufgabe 3 (*)

Wir betrachten das folgende Spiel: es werden zufällig und gleichverteilt n Bälle in n Urnen geworfen. Anschliessend werden alle Bälle aus dem Spiel entfernt, die alleine in einer Urne liegen. Mit den verbliebenen Bällen wird die gleich Prozedur solange wiederholt, bis keine Bälle mehr übrig sind.

Zeigen Sie, dass das Spiel mit hoher Wahrscheinlichkeit nach $O(\log \log n)$ Runden vorbei ist.

Frohe Weihnachten!

Besprechung der Hausaufgaben in der Übung am 11.1.2005.