

Algebra II

Lösung 1

SS 02

Aufgabe 1

Die richtige Formel lautet

$$3^n - 3 \cdot 2^n + 3.$$

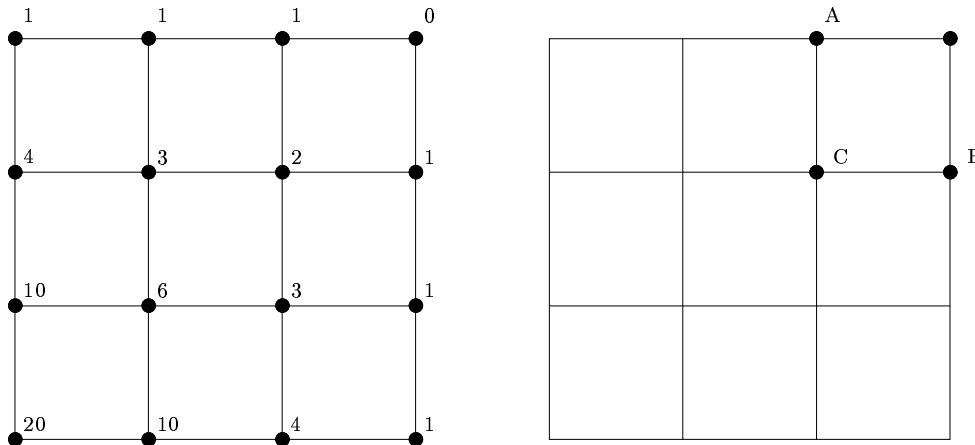
Begründung: Insgesamt gibt es 3^n verschiedene Folgen der Länge n . Sei m die Anzahl der Folgen, welche **nicht** alle drei Zeichen enthalten. Dann ist die gesuchte Anzahl $3^n - m$.

Um m zu berechnen, betrachten wir die folgenden drei Mengen. Sei A die Menge der Folgen, welche nur aus $\$$ und $\#$ bestehen. B analog für $\$$ und $@$ sowie C für $\#$ und $@$. Es gilt $|A| = |B| = |C| = 2^n$. Mit Hilfe von A , B und C lässt sich m ausdrücken als $|A \cup B \cup C|$. Nach dem Prinzip der Inklusion-Exklusion gilt

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Es ist einfach zu sehen dass $|A \cap B| = |A \cap C| = |B \cap C| = 1$, da zum Beispiel $A \cap B$ nur die Folge $\$ \$ \$ \$$ enthält. Die Menge $A \cap B \cap C$ enthält gar kein Element. Somit erhalten wir $m = 3 \cdot 2^n - 3$. Die korrekte Formel lautet somit $3^n - 3 \cdot 2^n + 3$.

Aufgabe 2



Auf dem linken Bild (Rückseite) sieht man die Lösung. Zu jedem Gitterpunkt ist die Anzahl verschiedener Wege zum Ziel (= (3, 3)) angegeben. Von (0, 0) aus gibt es also 20 verschiedene Wege bis ins Ziel. Das rechte Bild soll den Lösungsweg andeuten. Vom Punkt A aus gibt es nur einen Weg ins Ziel. Das Gleiche gilt für den Punkt B. Deshalb notieren wir an diesen Stellen die Zahl 1. Vom Punkt C aus kann man entweder nach A oder nach B gehen, insgesamt gibt es also $1 + 1 = 2$ Wege bis ins Ziel; wir notieren die Zahl 2. Mit der gleichen Idee arbeitet man sich schrittweise bis nach (0, 0) vor (bzw. zurück).

Bemerkung: Die Zahlen auf dem linken Bild sind Binomialkoeffizienten und man erkennt das Pascal-Dreieck.

Alternativer Lösungsweg: Wir bezeichnen einen Schritt nach rechts mit dem Buchstaben r und einen Schritt nach oben mit o . Jeder Weg von (0, 0) nach (3, 3) ist nun eindeutig durch ein Wort der Länge sechs darstellbar, wobei dieses Wort aus je drei r 's und drei o 's besteht, also z.B. $rooror$. Die Aufgabe ist damit auf das Problem reduziert, zu bestimmen auf wieviele verschiedene Arten man drei ununterscheidbare Symbole (rrr) auf sechs Plätzen anordnen kann, bzw. zu bestimmen wieviele drei-elementige Teilmengen von $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ es gibt. Bekanntlich ist dies $\binom{6}{3} = 20$.

Um alle Wege auszugeben, definieren wir ein Feld $a[0]$ bis $a[5]$. Dazu definieren wir eine rekursive Prozedur **schritt**. Diese muss mit **schritt(0,0,0)** aufgerufen werden.

```
schritt(xpos,ypos,zaehler)
  falls zaehler==6 gib a[0] bis a[5] aus;

  falls xpos<3
    a[zaehler]:='r';
    schritt(xpos+1,ypos,zaehler+1);

  falls ypos<3
    a[zaehler]:='o';
    schritt(xpos,ypos+1,zaehler+1);
```

Aufgabe 3

- (1) Die Menge $\{\text{true}, \text{false}\}^3$ besteht aus $2^3 = 8$ Elementen. Mit dem bekannten Satz (Vorlesung, oder Buch Proposition 2.1.1) bekommt man 2^8 verschiedene Funktionen.
- (2) Jeder der fünf Bausteine hat drei Zustände. Damit kann die Schaltung höchstens 3^5 verschiedene Funktionen realisieren. Das Produkt der Firma hält nicht was es verspricht, da $3^5 = 243 < 2^8 = 256$.