

Algebra II**Lösung 12****SS 02****Aufgabe 1**

Wir konstruieren den Graphen $G = (V, E)$ mit Hilfe von \mathcal{L} und \mathcal{P} . Wir wählen $V = \mathcal{L} \cup \mathcal{P}$. Wir verbinden $l \in \mathcal{L}$ mit $p \in \mathcal{P}$ genau dann, wenn p auf der Gerade l liegt.

Dieser Graph ist bipartit, denn es gibt keine Kanten innerhalb der Mengen \mathcal{P} und \mathcal{L} . Er enthält auch keinen $K_{2,2}$, da nach der Definition der projektiven Ebene jedes Paar von Geraden sich nur in einem Punkt schneidet.

Aufgabe 2

Wir betrachten den Körper der Ordnung $3^2 = 9$. Wir wissen nach Folie 7, dass die additive Gruppe in diesem Körper isomorph zu $\mathbb{Z}_3^2 = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ ist. Diese Gruppe ist nicht zyklisch. Für jedes Element in $k \in \mathbb{Z}_3$ gilt $k^3 \equiv 0 \pmod{3}$. Dies gilt natürlich auch für jedes Element in $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$. (Damit $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ zyklisch ist, müssen p und q teilerfremd sein.)

Auf der selben Folie steht, dass die multiplikative Gruppe isomorph zur Gruppe $\mathbb{Z}_8 = (\mathbb{Z}_8, +)$ ist, diese Gruppe ist natürlich zyklisch. Ein erzeugendes Element ist

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

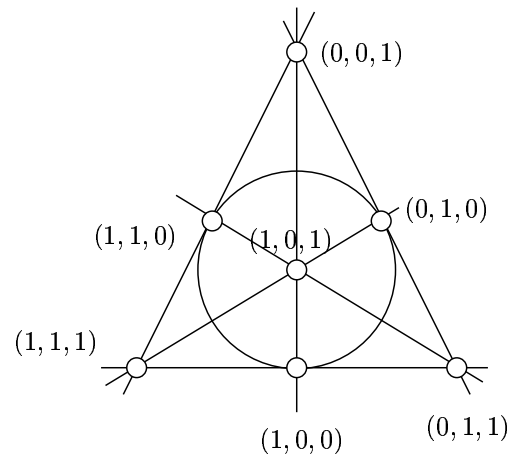
Aufgabe 3

Wir betrachten die Menge $Q = \mathbb{Z}_2^3 \setminus \{0\}$. Wir haben $|Q| = 7$. Da wir wissen, dass die projektive Ebene über \mathbb{Z}_2 sieben Punkte enthält, wissen wir also, dass jedes Element in Q eine eigene Äquivalenzklasse darstellt. Also gilt $\mathcal{P} = Q$.

Die Geraden sind nun

$$\begin{aligned} \ell_{[(1,0,0)]} &= \{(0, 1, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 1)\} \\ \ell_{[(0,1,0)]} &= \{(1, 0, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 1)\} \\ \ell_{[(0,0,1)]} &= \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 0)\} \\ \ell_{[(1,1,0)]} &= \{(0, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\} \\ \ell_{[(1,0,1)]} &= \{(0, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 1)\} \\ \ell_{[(0,1,1)]} &= \{(1, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\} \\ \ell_{[(1,1,1)]} &= \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\} \end{aligned}$$

Beachte, dass z.B. $\ell_{[(1,0,0)]}$ alle Elemente aus $q \in Q$ enthält, deren Skalarprodukt mit $(1,0,0)$ gleich 0 mod 2 ist. Diese Koordinaten können wir nun in die projektive Ebene eintragen.



Aufgabe 4

Es gilt

$$\begin{aligned} a \cdot 0 &= a \cdot (0 + 0) && (0 \text{ Neutralelement bzgl. } +) \\ &= a \cdot 0 + a \cdot 0 && (\text{Distributivgesetz}) \end{aligned}$$

und daraus $0 = a \cdot 0$, weil man in der Gruppe kürzen darf (wir verwenden also, dass der Ring bzgl. Addition eine Gruppe bildet).

Der Beweis für $0 \cdot a = 0$ geht analog.