

# Algebra II

# Lösung 9

# SS 02

## Aufgabe 1

(b) Wir schreiben als erstes die Gruppentabelle hin.

	1	-1	$i$	$-i$
1	1	-1	$i$	$-i$
-1	-1	1	$-i$	$i$
$i$	$i$	$-i$	-1	1
$-i$	$-i$	$i$	1	-1

(a) Damit ist klar, dass die Gruppe abgeschlossen ist. Die Assoziativität gilt offensichtlich, da die Multiplikation über den Komplexen Zahlen assoziativ ist. Weiter ist 1 das Neutralelement und die Inversen lassen sich aus der Tabelle ablesen.

(c) Die Gruppe ist isomorph zu  $(\mathbb{Z}_4, +)$ , da sie zyklisch ist, wobei  $i$  ein erzeugendes Element ist.

## Aufgabe 2

(a) Offensichtlich gilt  $y^{-1}x^{-1}xy = 1$ . Also ist  $y^{-1}x^{-1}$  das Inverse von  $xy$ . Somit gilt  $y^{-1}x^{-1} = (xy)^{-1}$ .

(b) Wir betrachten die Menge  $\{1, a, b, c\}$ , wobei 1 das Neutralelement der Gruppe darstellen soll. Wenn wir nun die Gruppentabelle betrachten, so sind jeweils die erste Zeile und die erste Spalte schon durch das Neutralelement definiert. Für den Eintrag  $aa$  bleiben jetzt eigentlich nur zwei Möglichkeiten: Entweder 1 oder ein Element aus  $\{b, c\}$ . Dabei ist es egal, ob wir  $b$  oder  $c$  wählen, da die beiden resultierenden Gruppen isomorph zueinander sind. Für den zweiten Fall ergibt sich dann alles aus der Bedingung, dass jede Zeile/Spalte eine Permutation von  $1abc$  sein muss. Im ersten Fall kann man noch entscheiden, ob  $bb = 1$  oder  $bb = a$  gelten soll.

	1	$a$	$b$	$c$
1	1	$a$	$b$	$c$
$a$	$a$	$b$	$c$	1
$b$	$b$	$c$	1	$a$
$c$	$c$	1	$a$	$b$

	1	$a$	$b$	$c$
1	1	$a$	$b$	$c$
$a$	$a$	$c$	1	$b$
$b$	$b$	1	$c$	$a$
$c$	$c$	$b$	$a$	1

	1	$a$	$b$	$c$
1	1	$a$	$b$	$c$
$a$	$a$	1	$c$	$b$
$b$	$b$	$c$	$a$	1
$c$	$c$	$b$	1	$a$

	1	$a$	$b$	$c$
1	1	$a$	$b$	$c$
$a$	$a$	1	$c$	$b$
$b$	$b$	$c$	1	$a$
$c$	$c$	$b$	$a$	1

Natürlich müssen wir noch zeigen, dass diese Tabellen wirklich Gruppentabellen entsprechen. Dies folgt einfach aus der Tatsache, dass wir in der Vorlesung schon zwei verschiedene Gruppen der Ordnung 4 kennengelernt haben.

(c) Seien  $x$  und  $y$  zwei beliebige Elemente aus  $G$  und sei 1 das Neutralelement. Nach Voraussetzung gilt  $(xy)(xy) = 1$ . Also bekommen wir  $xy = x1y = x(xyxy)y = (xx)yx(yy) = yx$ .

## Aufgabe 3

Da aus  $xx^{-1} = 1$  auch  $x^{-1}x = 1$  folgt, können wir jedes Element mit seinem Inversen paaren. D.h. wir partitionieren also die Gruppenelemente in Teilmengen der Kardinalität zwei und eins (wenn  $xx = 1$ ). Da wir insgesamt eine gerade Anzahl Elemente haben und das Neutralelement zu sich selbst invers ist, muss es noch mindestens ein weiteres Element  $y$  geben, für welches  $yy = 1$  gilt. Die Menge  $\{1, y\}$  bildet eine Untergruppe. Da es nur eine Gruppe der Ordnung 2 gibt, ist diese isomorph zu  $\mathbb{Z}_2$ .

## Aufgabe 4

- (1) Für die Anzahl Kanten eines Graphen mit  $n$  Knoten, der keinen Untergraphen isomorph zum  $K_{2,3}$  hat, gilt  $|E| \leq \frac{1}{2}(n + \sqrt{2}n^{3/2})$ .

**Beweis:** Für  $G = (V, E)$  ohne  $K_{2,3}$  definieren wir den bipartiten Graphen  $H = (V \cup \binom{V}{2}, M)$ , wobei  $M := \{\{v, \{u_1, u_2\}\} : \{v, u_1\} \text{ und } \{v, u_2\} \in E\}$ . Es gilt  $|M| = \sum_{v \in V} \binom{d_v}{2}$ , wobei  $d_v := \deg_G(v)$  (Der Graph  $H$  ist genau gleich definiert wie im Skript). Ausserdem gilt  $|M| \leq 2 \binom{n}{2}$  denn zwei Knoten in  $G$  haben höchstens 2 gemeinsame Nachbarn, andernfalls gäbe es einen Untergraphen isomorph zum  $K_{2,3}$ . Es folgt  $\sum_{v \in V} \binom{d_v}{2} \leq 2 \binom{n}{2}$ . Aus der in der Vorlesung hergeleiteten Folgerung der Cauchy-Schwarz Ungleichung erhalten wir nun

$$|E| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} d_v \leq \frac{1}{2} \left( n + \sqrt{2n} \sqrt{\binom{d_v}{2}} \right) \leq \frac{1}{2} \left( n + \sqrt{2n} \sqrt{2 \binom{n}{2}} \right) \leq \frac{1}{2} (n + \sqrt{2}n^{3/2}).$$

- (2) Jeder Knoten hat Grad  $\leq 1$ , denn ein Knoten vom Grad 2 entspricht bereits einem Untergraphen isomorph zum  $K_{2,1}$ . Also erhält man

$$|E| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} \deg_G(v) \leq \frac{1}{2} \sum_{v \in V} 1 = \frac{n}{2}.$$

Der Graph kann also maximal  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  haben. ( $\lfloor x \rfloor$  bezeichnet wie üblich die grösste ganze Zahl, die kleiner  $x$  ist.)