Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Ecole polytechnique fédérale de Zurich
Politecnico federale di Zurigo
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Prof. Emo Welzl *20. Mai2002*

Algebra II — *Bonuslösungen* — *SS 02*

Aufgabe 1

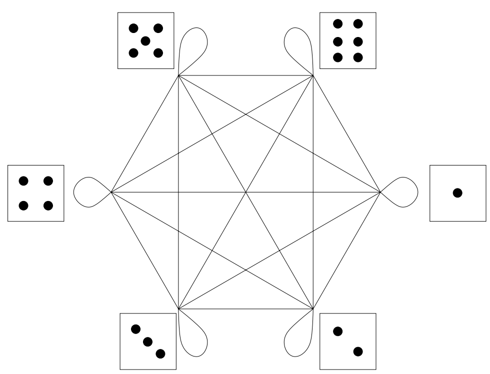
(i) Wie wir schon oft gesehen haben, gibt es $26^{\underline{10}}$ injektive Funktionen von einer 10 Elementigen Menge in eine 26 elementige Menge. Insgesamt gibt es 26^{10} verschiedene Funktionen. Also sind $26^{10} - 26^{\underline{10}}$ nicht injektiv.

(ii) Wir betrachten überhaupt nur Funktionen, welche '0' auf 'a' und '9' auf 'z' abbilden. Davon gibt es 26^8. Davon sind aber nur $24^{\underline{8}}$ injektiv. Also sind $26^8 - 24^{\underline{8}}$ nicht injektiv.

Aufgabe 2

Wir betrachten einen beliebigen Graphen mit n Knoten. Der kleinste mögliche Knotengrad ist 0, der grösste $n-1$. Da in einem Graphen mit n Knoten nicht gleichzeitig ein Knoten mit Grad 0 und einer mit Grad $n-1$ existieren können, gibt es nur $n-1$ verschiedene Grade. Nach dem Schubfachprinzip müssen also mindestens zwei den selben Grad haben.

Aufgabe 3



Wir betrachten den vollständigen Graphen mit den sechs Knoten $1 \dots 6$. Zusatzlich fügen wir eine Schleife an jeden Knoten an. Jede Kante dieses Graphen steht für einen der 21 Dominosteine (Die Schleifen stehen für die Steine, welche zweimal die gleiche Augenzahl aufweisen). Jede Anordnung der Dominosteine, welche die verlangte Bedingung erfüllt, entspricht einem Eulerspaziergang in diesem Graphen.

Im Gegensatz zu einem Eulerkreis braucht ein Eulerspaziergang nicht an seinen Startpunkt zurückzukehren. Es lässt sich leicht zeigen, dass in einem Graphen ein Eulerspaziergang existiert dann und nur dann wenn der Graph zusammenhängend ist und höchstens zwei Knoten ungeraden Grad haben.

In unserem Graphen haben alle Knoten ungeraden Grad (Die Schleifen zählen doppelt). Also enthält unser Graph keinen Eulerspaziergang.

Aufgabe 4

Wir suchen nach der Kardinalität n der kleinsten Menge, welche mindestens 12 dreielementige Teilmengen enthält. Es muss also gelten:

$$\binom{n}{3} \geq 12.$$

Das kleinste mögliche n ist 6.

Aufgabe 5

Seien T, J und S die entsprechenden Mengen.

Wir wissen

$$|T \cup J \cup S| = |T| + |J| + |S| - |T \cap J| - |T \cap S| - |J \cap S| + |T \cap J \cap S|.$$

Beachte, dass die Menge der Leute, welche nur Tennis und Schach spielen, durch $|T \cap S| - |T \cap J \cap S|$ ausgedrückt werden kann. Sei Z die Menge der Leute, welche genau zwei Vergnügen nachgehen. Deren Kardinalität ist also

$$|Z| = |T \cap J| + |T \cap S| + |J \cap S| - 3|T \cap J \cap S|.$$

Wenn wir die beiden Formeln zusammenfügen bekommen wir

$$|T \cup J \cup S| = |T| + |J| + |S| - |Z| - 2|T \cap J \cap S|.$$

Diese Formel gilt auch für relative Häufigkeiten. Durch einsetztten kriegen wir

$$1 = 0.6 + 0.64 + 0.5 - 0.45 - 2|T \cap J \cap S|.$$

Damit bekommen wir $|T \cap J \cap S| = 0.145$.

Aufgabe 6

Mit dem Binomialsatz bekommen wir

$$1001^4 = (1 + 1000)^4 = \binom{4}{0} + 1000\binom{4}{1} + 1000^2\binom{4}{2} + 1000^3\binom{4}{3} + 1000^4\binom{4}{4} = 1004006004001.$$