Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Ecole polytechnique fédérale de Zurich
Politecnico federale di Zurigo
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Prof. Emo Welzl *10. Juni 2002*

Algebra II *Serie 9* *SS 02*

Abgabe: 17.6.2002 in der Pause der Vorlesung

Präsenzaufgabe 1

Zeige, dass fuer jede Primzahl p, die Menge $[1..p-1]$ mit Multiplikation $\mod p$ eine Gruppe ist. Bestimme in dieser Gruppe für $p = 7$ die Inversen von 3 und 4. Bestimme $2^6 \mod 7$ und $3^6 \mod 7$.

Präsenzaufgabe 2

Zeige, dass für beliebige Elemente x, y einer Gruppe gilt: x ist invers zu y gdw. y invers zu x ist.

Aufgabe 1

Betrachte die komplexen Zahlen $\{1, -1, \mathrm{i}, -\mathrm{i}\}$ mit Multiplikation.

(i) Zeige, dass es sich dabei um eine Gruppe handelt.

(ii) Schreibe die Tabelle der Gruppe auf.

(iii) Zu welchen anderen Gruppen der Ordnung 4, die wir kennengelernt haben, ist diese Gruppe isomorph?

Aufgabe 2

(a) Seien x und y zwei Gruppenelemente. Zeige $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$.

(b) Zeige, dass es nur zwei nicht isomorphe Gruppen der Ordung 4 gibt.

(c) Sei G eine Gruppe, in welcher jedes Element zu sich selber invers ist. Zeige, dass G abelsch ist.

Aufgabe 3

Zeige, dass es in jeder Gruppe der Ordnung 2002 eine Untergruppe isomorph zu $\mathbb{Z}_2$ gibt.

Aufgabe 4

Sei $n \geq 1$.

(1) Beweise eine möglichst gute obere Schranke für die Anzahl der Kanten eines Graphen mit n Knoten, der keinen Untergraph isomorph zum $K_{2,3}$ hat (in Anlehnung an den Beweis aus der Vorlesung für $K_{2,2}$-freie Graphen).

(2) Wieviele Kanten kann ein Graph mit n Knoten ohne Untergraph isomorph zum $K_{2,1}$ haben?