Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Ecole polytechnique fédérale de Zurich
Politecnico federale di Zurigo
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Institut für Theoretische Informatik
Dr. B. Gärtner, Prof. Dr. J. Hromkovič

7. Oktober 2008

Informatik für Mathematiker und Physiker — Lösung 2 — HS 08

URL: http://www.ti.inf.ethz.ch/ew/courses/Info1_08/

Skript-Aufgabe 3.10
Lösung in separatem Anhang zum Buch. Siehe Internetseite des Kurses.

Skript-Aufgabe 3.21
Für alle Elemente auf der Diagonalen wählen wir eine andere Ziffer aus {0,1,2,3,4,5,6,7,8}. Also zum Beispiel $c = 0.1638783\ldots$.

Skript-Aufgabe 4.3
Sei $\mathcal{F} \dot\cup \mathcal{I} = \mathbb{R}$ die Partition der reellen Zahlen in diejenigen mit endlicher Repräsentation ($\mathcal{F}$) und diejenigen ohne endliche Repräsentation ($\mathcal{I}$). Wir wollen zeigen, dass $|\mathcal{F}| \ll |\mathcal{I}|$. Aus der Vorlesung wissen Sie, dass eine unendliche Menge, deren Elemente alle eine endliche Darstellung haben, die gleiche Kardinalität wie $\mathbb{N}$ hat. Insbesondere gibt es also eine Bijektion $f : \mathcal{F} \to \mathbb{N}$, und somit $|\mathcal{F}| = |\mathbb{N}|$.

Um einen Beweis durch Widerspruch zu führen, nehmen Sie an, dass es eine bijektive Funktion, $m : \mathcal{F} \to \mathcal{I}$, gibt, die jedem Element von $\mathcal{F}$ ein eindeutiges Element von $\mathcal{I}$ zuordnet, und umgekehrt. Dann würde gelten, dass $|\mathcal{F}| = |\mathcal{I}|$; die beiden Mengen wären gleich gross.

In diesem Fall können wir eine weitere bijektive Funktion, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$, wie folgt definieren:

$$g(r) := \begin{cases} 2 \cdot f(r) & \text{falls } r \in \mathcal{F}, \\ 2 \cdot f(m^{-1}(r)) - 1 & \text{falls } r \in \mathcal{I}. \end{cases}$$

Wir ersparen uns den Beweis, dass g tatsächlich eine Bijektion zwischen $\mathbb{R}$ und $\mathbb{N}$ ist. Die wichtige Konsequenz ist, dass $|\mathbb{R}| = |\mathbb{N}|$ gelten würde. Sie wissen natürlich aus der Vorlesung, dass $|\mathbb{R}| \gg |\mathbb{N}|$. Da haben wir unseren Widerspruch, und somit muss $|\mathcal{F}| \neq |\mathcal{I}|$ gelten. Desweiteren ist es nicht schwer zu sehen, dass $|\mathcal{F}| \ll |\mathcal{I}|$, und nicht umgekehrt.

Bemerkung: Man kann natürlich auch mit dem Diagonalbeweis (wie für $\mathbb{R}$) direkt zeigen, dass $\mathcal{I}$ eine grössere Kardinalität als $\mathbb{N}$ hat. Dann folgt $|\mathcal{F}| \ll |\mathcal{I}|$ auf direktem Wege.

Skript-Aufgabe 4.8
Das Entscheidungsproblem $(\mathbb{N}, M(2-\mathrm{DIAG}))$ ist nicht algorithmisch lösbar, da es kein Programm gibt, das $M(2-\mathrm{DIAG})$ akzeptiert. Erinnern Sie sich, dass jeder Entscheidungsalgorithmus dieser Form auch als Programm geschrieben werden kann. Da es kein Programm gibt, welches $M(2-\mathrm{DIAG})$ akzeptiert, kann es auch keinen Algorithmus geben der obiges Problem entscheidet.

Die folgende Tabelle deutet an, dass $M(2-\mathrm{DIAG})$ sich in mindestens einem Element von der akzeptierten Mengen eines beliebigen Programmes unterscheidet. Für Programm P_i ist das natürlich genau das Element $2i$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	...
$M(P_1)$	0	$\boxed{1}$	0	1	0	0	0	1	...
$M(P_2)$	1	1	0	$\boxed{0}$	1	0	1	1	...
$M(P_3)$	1	0	1	0	1	$\boxed{0}$	0	1	...
$M(P_4)$	1	1	1	1	1	1	1	$\boxed{0}$	...
$\vdots$									
$M(2-\mathrm{DIAG})$	0	0	0	1	0	1	0	1	...