Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Ecole polytechnique fédérale de Zurich
Politecnico federale di Zurigo
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Institut für Theoretische Informatik
Dr. B. Gärtner, Prof. Dr. J. Hromkovič

6. Oktober 2009

Informatik für Mathematiker und Physiker Lösung 2 HS 09

URL: http://www.ti.inf.ethz.ch/ew/courses/Info1_09/

Aufgabe 2 Die naive Methode, um zu testen, ob eine Zahl n prim ist, versucht n durch alle ganzen Zahlen in der Menge $\{2, \ldots, n-1\}$ zu teilen. Wenn eine der Divisionen ganzzahlig ist, dann ist n nicht prim. Wenn keine der Divisionen ganzzahlig ist, dann ist n prim.

Die vielleicht naheliegendste Verbesserung, die wir machen können, ist, nur auf Teiler bis und mit $\lceil\sqrt{n}\rceil$ zu testen, denn falls sich bis zu dieser Zahl kein Teiler findet, dann kann auch darüber keiner mehr sein. Dies liegt daran, dass ein Teiler kleiner als $\sqrt{n}$ immer mit einem Teiler grösser als $\sqrt{n}$ gepaart ist. Wenn Sie dies erwähnt haben, dann haben Sie sich Ihre 4 Punkte schon verdient.

Die Effizienz kann noch erhöht werden, wenn man alle gerade Zahlen ausser der 2 auslässt. Denn wenn die Zahl n nicht durch 2 teilbar ist, dann ist sie durch keine gerade Zahl teilbar.

Und noch weiter... Man testet, ob n durch 2 oder 3 teilbar ist. Wenn nein, dann prüft man alle Zahlen der Form $6k \pm 1 \leq \sqrt{n}$, wobei $k \in \mathbb{N}$. Dies funktioniert aus dem selben Grund wie vorhin. Alle Zahlen, die man ausgelassen hat, sind entweder durch 2 oder 3 teilbar.

Und noch weiter... Das oben beschriebene System lässt sich noch weiter führen. Suchen Sie einmal auf dem Internet nach dem Stichwort “Sieb des Eratosthenes”.

Abgesehen von randomisierten Methoden, die sehr populär sind, gibt es noch andere Methoden, die wesentlich schneller sind, aber auch wesentlich komplizierter. Dies war hier natürlich nicht erwartet.

Aufgabe 3 $\mathrm{DIAG} \cap \{0, \ldots, 8\} = \{1, 4, 6, 7, 8\}$.

Man muss nicht unbedingt mit der Hauptdiagonalen arbeiten. Man kann zum Beispiel DIAG' definieren, als die Menge, die mit allen in der folgenden Tabelle eingekreisten Zahlen differiert (resp. mit der korrespondierenden Menge der natürlichen Zahlen).

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
$M(P_0)$	1	1	0	1	0	1	1	1	1	...
$M(P_1)$	0	0	1	1	0	0	1	1	1	
$M(P_2)$	1	0	1	0	0	1	1	0	0	
$M(P_3)$	1	0	1	1	0	0	0	1	1	
$M(P_4)$	0	1	0	1	0	1	0	1	1	
$M(P_5)$	0	0	0	0	0	1	1	0	0	
$M(P_6)$	0	1	1	0	0	1	0	1	0	
$M(P_7)$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	
$M(P_8)$	0	1	1	1	0	1	1	0	0	
⋮										⋱

Aufgabe 4 Eine bekannte Formel, um π zu berechnen, beruht auf den beiden folgenden Identitäten.

$$\begin{aligned} \arctan(a) &= a + \frac{a^3}{3} - \frac{a^5}{5} + \dots && (1) \\ \pi &= 16\arctan(1/5) - 4\arctan(1/239) && (2) \end{aligned}$$

Noch älter, aber auch einfacher ist die Identität

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \quad (3)$$

Es gibt noch viele weitere solcher Summenformeln. Ein Algorithmus, der π nun bis zu einer bestimmten Stelle angeben soll, berechnet eine solche Formel seiner Wahl so lange (das heisst bis zu einem bestimmten Term), bis die gewünschte Stelle der Annäherung an π stabil ist. Eine Stelle ist stabil, sobald die verbleibenden Terme so klein sind, dass sie an der gewünschten Stelle nichts mehr ändern können. Dieser letzte Punkt ist ein wenig subtil, weil wir eigentlich eine obere Schranke für die Summe der verbleibenden Terme angeben müssen, aber lassen wir dies hier im Detail bleiben.

Des weiteren wissen wir, dass π eine irrationale Zahl ist. Deshalb kann es auch nicht sein, dass irgendwann eine periodische Ziffer 9 auftritt. Somit haben wir eine endliche Beschreibung zur Berechnung von π gegeben, und π ist in diesem Sinne *berechenbar*.

Es gibt natürlich Formeln, die schneller zum gewünschten Resultat führen als andere, aber das war hier nicht gefragt. Hier geht es nur um *endliche* Zeit.

Aufgabe 5 Wir können alle Tripel (i, j, k) zusammenfassen, für die gilt $i + j + k = c$, wobei $c \in \{3, 4, \dots\}$. Nennen wir diese Mengen A_c. Die Tripel, die in A_c enthalten sind, finden sich im 3 dimensionalen Raum auf Ebenen wieder, die eine Normalen $(1, 1, 1)$ und wachsenden Abstand zum Ursprung haben. In der Menge A_c sind genau $\binom{c-1}{2}$ Tripel enthalten. Sei nun $s_n := \sum_{i=3}^{n} |A_i| = \sum_{i=3}^{n} \binom{i-1}{2} = \frac{n}{6}(n^2 - 1)$ die Anzahl der Tripel auf den ersten $n - 2$ Ebenen; dies gilt für $n \in \{3, 4, \dots\}$. Zusätzlich definieren wir $s_2 := 0$.

Um eine Bijektion von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}^3$ herzustellen, ordnen wir jetzt den Tripeln in A_c die Zahlen $s_{c-1} + 1$ bis s_c zu. Dies entspricht natürlich genau $|A_c|$ Zahlen. Jedes Tripel aus $\mathbb{N}^3$ kommt in einem bestimmten A_c vor und alle A_c sind endlich. Das heisst, wir müssen nur noch eine Reihenfolge innerhalb einer bestimmten Menge A_c festlegen. Dies kann auf verschiedene Arten geschehen. Wir schlagen hier vor, die lexikographische Ordnung zu Hilfe zu ziehen. Das bedeutet, dass wir die Tripel "alphabetisch" ordnen. Das lexikographisch kleinste Tripel in A_c, nämlich $(1, 1, c-2)$, bekommt also die Zahl $s_{c-1}+1$ zugeordnet und das lexikographisch grösste, nämlich $(c - 2, 1, 1)$, bekommt s_c zugeordnet.

Diese Funktion ist auch umkehrbar. Für eine beliebige Zahl $n \in \mathbb{N}$ berechnen wir das grösste c, so dass $s_{c-1} < n$ und dann generieren wir das $(n - s_{c-1})$-te Tripel in der lexikographischen Ordnung aller Tripel mit der Koordinatensumme c.