Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Ecole polytechnique fédérale de Zurich
Politecnico federale di Zurigo
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Institut für Theoretische Informatik
Dr. Bernd Gärtner

3. April 2003

Theoretische Informatik — Übung 1 — SoSe 2003

Vorlesungstermin:	Montag 9.15–10.00 Uhr und Donnerstag 14.15–16.00 Uhr
Ort:	IFW A36
Dozent:	Dr. Bernd Gärtner `<gaertner@inf.ethz.ch>`
Organisation:	Udo Adamy `<adamy@inf.ethz.ch>`
Assistenten:	Yoshio Okamoto `<okamotoy@inf.ethz.ch>`, IFW B48.2
	Udo Adamy `<adamy@inf.ethz.ch>`, IFW B45.2
	Ingo Schurr `<schurr@inf.ethz.ch>`, IFW B43
	Birgitta Weber `<weberb@inf.ethz.ch>`, CLW C3
	Kaspar Fischer `<fischerk@inf.ethz.ch>`, IFW B48.2
	Michael Hoffmann `<hoffmann@inf.ethz.ch>`, IFW B46.2
Übungstermine:	Freitag 8.15–10.00 Uhr, HG E21, Yoshio Okamoto
	Freitag 8.15–10.00 Uhr, HG F26.3, Udo Adamy
	Freitag 8.15–10.00 Uhr, HG G26.5, Ingo Schurr
	Freitag 8.15–10.00 Uhr, LFW C11, Birgitta Weber
	Freitag 10.15–12.00 Uhr, HG G26.5, Kaspar Fischer
	Freitag 10.15–12.00 Uhr, HG F26.3, Michael Hoffmann
Webseite:	`www.ti.inf.ethz.ch/ew/courses/TI_03`

Literatur

- Cormen, Leiserson, Rivest: *Introduction to Algorithms*. MIT Press (1990).
- Motwani, Raghavan: *Randomized Algorithms*. Cambridge University Press (1995).
- Mehlhorn, Näher: *LEDA*. Cambridge University Press (1999).

Präsenzaufgabe 1

Sei X eine Zufallsvariable, die Werte aus der Menge $\{1,2,3,4\}$ mit folgenden Wahrscheinlichkeiten annimmt: $\mathrm{Prob}[X=1]=\frac{1}{4}, \mathrm{Prob}[X=2]=\frac{1}{4}, \mathrm{Prob}[X=3]=\frac{1}{8}$ und $\mathrm{Prob}[X=4]=\frac{3}{8}$.

(a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathrm{Prob}[X\geq 2]$ sowie die Erwartungswerte $\mathrm{E}[X]$, $\mathrm{E}[X^2]$, $\mathrm{E}[X \mid X\geq 3]$ und $\mathrm{E}[X \mid X<3]$.

(b) Nehmen Sie an, die beiden Erwartungswerte $\mathrm{E}[X \mid X\geq a]$ und $\mathrm{E}[X \mid X<a]$ mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten $\mathrm{Prob}[X\geq a]$ und $\mathrm{Prob}[X<a]$ seien gegeben. Wie lässt sich damit der Erwartungswert $\mathrm{E}[X]$ ausdrücken? Überprüfen Sie dies am obigen Beispiel für $a=3$.

Aufgabe 1

Viel Lärm um Nichts? Julia und Romeo wollen ein Fest besuchen. Nun finden am betreffenden Abend gleich zwei Feste statt und sie müssen sich für eines entscheiden. An beiden Festen findet eine Lotterie statt, bei der Gutscheine für Theaterbesuche verlost werden. Julia und Romeo beschliessen, das Fest zu besuchen, an dem die erwartete Anzahl gewonnener Gutscheine grösser ist. Die Lotterien sind wie folgt organisiert:

- An dem ersten Fest bekommt jeder Gast ein Los mit der Nummer Zehn, in dem sich drei Gutscheine und ein Bon mit der zufälligen Nummer i befinden, wobei $0 \leq i \leq 9$. Ist i gleich Null, so ist die Lotterie beendet. Andernfalls kann man den Bon gegen ein neues Los mit der Nummer i eintauschen, welches wieder drei Gutscheine und einen Bon mit der zufälligen Nummer j enthält, wobei $0 \leq j \leq i-1$. Einen Bon mit einer Nummer ungleich Null kann man wieder gegen ein Los eintauschen. Dies geht solange bis man schlussendlich ein Los mit der Nummer Null erhält. Der erwartete Gewinn bei dieser Lotterie ist $a(10)$, wobei $a(0) = 0$ und für $n \geq 1$,

$$a(n) = 3 + \frac{1}{n}(a(0) + a(1) + \ldots + a(n-1)).$$

- Auch an dem zweiten Fest erhält jeder Gast ein Los mit der Nummer Zehn. In diesem befindet sich allerdings nur ein Gutschein, dafür aber zwei Bons mit den Nummern i und $10 - i - 1$, wobei $0 \leq i \leq 9$ zufällig. Für einen Bon mit der Nummer Null ist die Lotterie beendet. Bons mit einer Nummer $i > 0$ kann man gegen ein weiteres Los eintauschen. Dieses enthält wieder einen Gutschein und zwei Bons mit den Nummern j und $i - j - 1$, wobei $0 \leq j \leq i - 1$ zufällig. Die Bons kann man, solange ihre Nummer grösser als Null ist, wieder gegen Lose mit Gutscheinen eintauschen.

Welches Fest werden Julia und Romeo besuchen? Oder sollten sie ihrem Schicksal doch entrinnen?

Hinweis: Stellen Sie auch für das zweite Fest eine Rekursion auf und lösen Sie die Rekursionen für beide Feste. Für manchen mag es ein Motivationsschub sein, sich statt der Gutscheine für Theaterbesuche, Biergutscheine vorzustellen. Das Ergebnis der Aufgabe wird dadurch nicht beeinflusst. Mögen Sie Shakespeare?

Aufgabe 2

(a) Zeichnen Sie alle möglichen Suchbäume mit fünf Knoten deren Wurzel Rang vier hat und bestimmen Sie für jeden dieser Bäume die Wahrscheinlichkeit seines Auftretens als zufälliger binärer Suchbaum.

(b) Zeichnen Sie einen binären Suchbaum, der mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6!}$ als zufälliger binärer Suchbaum auf sechs Knoten auftritt.

Abgabe: am 10. April 2002 in der Vorlesung.