

Theoretische Informatik Übung 4 SoSe 2003

Webseite zur Vorlesung: www.ti.inf.ethz.ch/ew/courses/TI_03

Präsenzaufgabe 1

Gegeben sei ein kantengewichteter Graph $G = (V, E, w)$. Für Knoten s und t bezeichne $\gamma(s, t)$ das Gewicht eines minimalen (s, t) -Schnitts in G . Man zeige:

- (1) Für alle Tripel u, v, w von Knoten in V gilt

$$\gamma(u, w) \geq \min\{\gamma(u, v), \gamma(v, w)\} .$$

- (2) Wenn der minimale (s, t) -Schnitt in G nicht minimaler Schnitt von G ist, dann gibt es einen Knoten v mit

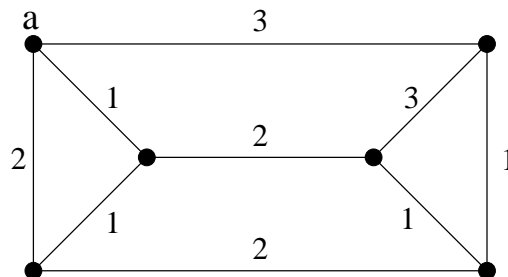
$$\min\{\gamma(s, v), \gamma(v, t)\} < \gamma(s, t) .$$

Präsenzaufgabe 2

In einem Graph G mit ganzzahligen positiven Kantengewichten ist der Schnitt minimalen Gewichts nicht eindeutig, wie man sich an vielen Beispielen veranschaulichen kann. Finde Beispiele von Graphen, die mehr als n (bzw. möglichst viele) minimale Schnitte haben (n ist die Anzahl der Knoten).

Aufgabe 1

Gegeben sei der folgende gewichtete Graph $G := (V, E, w)$:



Wenden Sie auf diesen Graphen den MINCUT-Algorithmus von Stoer und Wagner an, wobei Sie im Knoten a beginnen. Geben Sie die Phasenschnitte und den resultierenden minimalen Schnitt des Graphen an.

Aufgabe 2

Sei G ein Graph mit n Knoten und mit positiven Kantengewichten, dessen minimaler Schnitt Kosten μ habe.

1. Zeige, dass das Gesamtgewicht des Graphen (d.h. die Summe der Gewichte aller Kanten im Graph) mindestens $\mu \cdot n/2$ ist.

2. Ist diese Abschätzung bestmöglich? Das heisst, gibt es für jedes μ und n einen positiv kantengewichteten Graph mit n Knoten, minimalen Schnittkosten μ und Gesamtgewicht $\mu \cdot n/2$?
3. Ist die Voraussetzung, dass die Kantengewichte positiv sind, wesentlich für die Aussage in Teilaufgabe 1?

Aufgabe 3

Sei $G = (V, E, w)$ ein gewichteter Graph mit Gesamtgewicht $W = \sum_{e \in E} w(e)$. Was ist das erwartete Gewicht eines zufälligen Schnittes in G ? (Um einen zufälligen Schnitt $(S, V \setminus S)$ zu erhalten, ziehen wir jede Teilmenge S von V mit gleicher Wahrscheinlichkeit $1/2^{|V|}$.)

Aufgabe 4

Wir haben zwei Graphen $G = (V, E)$ und $G' = (V, E')$ auf derselben Knotenmenge. Wir wollen feststellen, wieviele Kanten in G' zwei Knoten in der selben Zusammenhangskomponente von G verbinden. Dazu verwenden wir den Algorithmus:

```

INIT_UNION_FIND(V)
s := 0;
for all {u, v} in E do
  x := FIND(u);
  y := FIND(v);
  if x ≠ y then
    for all a in Menge x do
      for all b in Menge y do
        if {a, b} in E' then s := s + 1;
    UNION(x, y);
return s;

```

Ist dieser Algorithmus korrekt, d.h. leistet er das Gewünschte? Wenn ja, warum? Finden Sie eine möglichst gute obere Schranke dafür, wie oft „ $\{a, b\} \in E'$ “ abgefragt wird.

Abgabe: am 8. Mai 2003 in der Vorlesung.