

Theoretische Informatik Übung 5 SoSe 2003Webseite zur Vorlesung: www.ti.inf.ethz.ch/ew/courses/TI_03**Präsenzaufgabe 1**

Gegeben sei ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$. $M \subseteq E$ sei ein maximales Matching, $N \subseteq E$ sei ein maximum Matching. Beweisen Sie, dass $|M| \geq |N|/2$ gilt, d.h. M hat mindestens halb so viele Kanten wie N .

Aufgabe 1

Es sei $G = (V, E)$ ein ungewichteter, ungerichteter Graph; ein grösstes Matching in G habe r Kanten. Betrachte nun ein Matching M , $|M| = k$ (also $k \leq r$).

1. Zeigen Sie, dass es für M mindestens $r - k$ paarweise knotendisjunkte augmentierende Wege gibt.
2. Ist $k < r$, so ist ausserdem (mindestens) einer dieser augmentierenden Wege nicht länger als $\frac{n}{r-k} - 1$, wobei $n = |V|$.

Hinweis: Lasst euch vom Beweis aus der Vorlesung inspirieren.

Aufgabe 2

Sei G ein Graph, in dem es perfekte Matchings (PM 's) gibt (z.B. $G = K_n$ für gerades n); jede Kante e von G sei mit einem positiven Kantengewicht $w(e)$ versehen.

Nehmen wir nun an, wir suchen nach *schwersten* PM 's, d.h. nach PM 's M , die $\sum_{e \in M} w(e)$ maximieren. Wie lässt sich das Konzept der augmentierenden Wege für diese Aufgabe adaptieren? Entwickeln und beweisen Sie insbesondere ein (nichttriviales) notwendiges und hinreichendes Kriterium dafür, dass ein PM ein *schwerstes* PM ist.

Ist die Annahme, dass die Kantengewichte positiv sind, von Belang?

Aufgabe 3

(*Random walk*) Ein Betrunkener steht in der Mitte einer sechs Schritte breiten Strasse und wankt zufällig jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ einen Schritt auf den linken bzw. rechten Strassenrand zu. Nach wie vielen Schritten liegt er im Strassengraben?

Hinweis: Wie so oft empfiehlt es sich, für die Lösung ein allgemeineres Problem anzugehen. Man betrachte den Erwartungswert von X_k , $-4 \leq k \leq 4$, für den Fall, dass er k Schritte rechts von der Strassenmitte startet (bei k negativ, entsprechend links). Versuchen Sie auch, den Erwartungswert experimentell zu schätzen, und mit den hergeleiteten Werten zu vergleichen.

Abgabe: am 15. Mai in der Vorlesung.