

Theoretische Informatik Übung 6 SoSe 2003Webseite zur Vorlesung: www.ti.inf.ethz.ch/ew/courses/TI_03**Präsenzaufgabe 1**Wieviele perfekte Matchings hat der vollständige Graph K_n auf n Knoten?**Aufgabe 1**

Gegeben sei ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$. Für eine Kante $e \in E$ bezeichnen wir mit $G \setminus e$ den Graphen $(V, E \setminus \{e\})$. Für einen Knoten $v \in V$ sei $G \setminus v$ der Graph $(V \setminus \{v\}, \{e \in E \mid v \notin e\})$. Schliesslich schreiben wir $\mu(G)$ für die grösstmögliche Anzahl von Kanten in einem Matching von G . Hat G keine Kanten, so gilt sicherlich $\mu(G) = 0$.

1. Zeigen Sie, dass, wenn G mindestens eine Kante $e = \{u, v\}$ besitzt, gilt:

$$\mu(G) = \max\{\mu(G \setminus e), 1 + \mu(G \setminus u \setminus v)\} . \quad (1)$$

2. Leiten Sie aus (1) einen Algorithmus zur Berechnung eines maximum Matchings ab.
3. Geben Sie eine möglichst gute obere Schranke für den Zeitbedarf Ihres Algorithmus an.
4. Entwerfen Sie ferner einen Algorithmus, der die *Anzahl* der perfekten Matchings in einem Graph G berechnet.

Aufgabe 2

Betrachten Sie folgende randomisierte Variante des Matching-Algorithmus für reguläre bipartite Graphen $G = (V, E)$ aus der Vorlesung: für einen Kreis $C \subseteq E$, dessen Kanten Gewichte in $\{1, \dots, k-1\}$ haben, wähle die Aufteilung $E_0, E_1, C = E_0 \cup E_1$ wie vorher. Nun entscheide aber durch einen Münzwurf, ob die Gewichte der Kanten in E_0 um 1 erhöht (Wahrscheinlichkeit $1/2$) oder erniedrigt (Wahrscheinlichkeit $1/2$) werden. Wird in E_0 erhöht, so wird natürlich in E_1 erniedrigt und umgekehrt.

Betrachten Sie eine feste Kante $e \in E$. Geben Sie eine obere Schranke für die erwartete Anzahl von Gewichtsänderungen an, die e während des Algorithmus durchmacht. Was ist somit die erwartete Gesamtanzahl von Gewichtsänderungen und die Laufzeit des Algorithmus?

Aufgabe 3

Geben Sie eine konkrete Implementierung des *stable marriage* Algorithmus' aus der Vorlesung in Pseudocode an. Überlegen Sie, welche Datenstrukturen (Arrays und Listen sollten genügen) zum Speichern welcher Informationen benötigt werden. Was ist die resultierende Laufzeit für n Männer und n Frauen?

Abgabe: am 22. Mai 2003 in der Vorlesung.