Wahrscheinlichkeitsraum

Endlicher Fall:

- endliche Menge $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$
- $\omega_i, i = 1, \ldots, n$ sind *Elementarereignisse*
- $\text{prob}(\omega_i) = p_i \geq 0$
- $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

Geordnete Würfelergebnisse mit zwei Würfeln

$$\Omega = \{(1,1), (1,2), \ldots, (1,6), (2,2), \ldots, (6,6)\}$$

$$\text{prob}(a,b) = \begin{cases} 1/36, & a = b, \\ 1/18, & \text{sonst} \end{cases}$$

Ereignis

- Teilmenge $W \subseteq \Omega$
- $\text{prob}(W) := \sum_{\omega \in W} \text{prob}(\omega)$

“Pasch” :

$$W = \{(1,1),(2,2),\ldots,(6,6)\}$$

$$\text{prob}(W) = 6 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$$

Zufallsvariable (ZV)

- Abbildung $X : \Omega \to I\!R$

- Ereignis $\{X = z\} := \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = z\}$

- $\{X \leq z\}, \{X \geq z\}$ entsprechend definiert

“Augensumme”:

$$X(a, b) := a + b$$

$$\{X = 7\} \quad = \quad \{(1,6),(2,5),(3,4)\}$$

$$\{X \leq 3\} \quad = \quad \{(1,1),(1,2)\}$$

Erwartungswert (EW) einer ZV

- $E(X) := \sum_{z \in X(\Omega)} z \cdot \text{prob}(X = z)$

---

z	$\{X = z\}$	$\text{prob}(X = z)$
2	$\{(1,1)\}$	1/36
3	$\{(1,2)\}$	1/18
4	$\{(1,3),(2,2)\}$	1/12
5	$\{(1,4),(2,3)\}$	1/9
6	$\{(1,5),(2,4),(3,3)\}$	5/36
7	$\{(1,6),(2,5),(3,4)\}$	1/6
8	$\{(2,6),(3,5),(4,4)\}$	5/36
9	$\{(3,6),(4,5)\}$	1/9
10	$\{(4,6),(5,5)\}$	1/12
11	$\{(5,6)\}$	1/18
12	$\{(6,6)\}$	1/36

Erwartete Augensumme:

$$\begin{aligned} E(X) &= 2\tfrac{1}{36} + 3\tfrac{1}{18} + 4\tfrac{1}{12} + 5\tfrac{1}{9} + 6\tfrac{5}{36} + 7\tfrac{1}{6} \\ &+ 8\tfrac{5}{36} + 9\tfrac{1}{9} + 10\tfrac{1}{12} + 11\tfrac{1}{18} + 12\tfrac{1}{36} = 7 \end{aligned}$$

Linearität des EW

Seien X, Y ZV; $s, t \in \mathbb{R}$

- $X + Y$ ist die ZV definiert durch

$$(X+Y)(\omega) := X(\omega) + Y(\omega)$$

- sX ist die ZV definiert durch

$$(sX)(\omega) := s \cdot X(\omega)$$

Es gilt:

$$E(sX + tY) = s \cdot E(X) + t \cdot E(Y).$$

$$X_a(a,b) := a, X_b(a,b) := b \quad (\Rightarrow X = X_a + X_b)$$

z	$\{X_a = z\}$	prob$(X_a = z)$
1	$\{(1,1),\ldots,(1,6)\}$	11/36
2	$\{(2,2),\ldots,(2,6)\}$	9/36
3	$\{(3,3),\ldots,(3,6)\}$	7/36
4	$\{(4,4),\ldots,(4,6)\}$	5/36
5	$\{(5,5),(5,6)\}$	3/36
6	$\{(6,6)\}$	1/36

z	$\{X_b = z\}$	prob$(X_b = z)$
1	$\{(1,1)\}$	1/36
2	$\{(1,2),(2,2)\}$	3/36
3	$\{(1,3),\ldots,(3,3)\}$	5/36
4	$\{(1,4),\ldots,(4,4)\}$	7/36
5	$\{(1,5),\ldots,(5,5)\}$	9/36
6	$\{(1,6),\ldots,(6,6)\}$	11/36

$$E(X_a) + E(X_b) = \frac{91}{36} + \frac{161}{36} = 7 = E(X)$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

W, B Ereignisse, prob$(B) \neq 0$

- prob$(W|B)$:= prob$(W \cap B)/$ prob(B) ist die *bedingte* Wahrscheinlichkeit von W, *gegeben* B

"Pasch, gegeben kleinste Zahl mindestens 5"

$$
\begin{aligned}
W &= \{(1,1),(2,2),\ldots,(6,6)\} \\
B &= \{(5,5),(5,6),(6,6)\} \\
W \cap B &= \{(5,5),(6,6)\}
\end{aligned}
$$

$$
\mathrm{prob}(W|B) = \frac{\mathrm{prob}(W \cap B)}{\mathrm{prob}(B)} = \frac{1/18}{1/9} = \frac{1}{2}
$$

Bedingter Erwartungswert

X ZV, B Ereignis, prob$(B) \neq 0$

- $E(X|B) := \sum_{z \in X(\Omega)} z \cdot \text{prob}(X = z|B)$ ist der *bedingte* Erwartungswert von X, *gegeben* B

“Erw. Augensumme, geg. kleinste Zahl ≥ 5”

z	prob$(X = z \mid B)$
10	1/4
11	1/2
12	1/4

$$E(X|B) = 10\frac{1}{4} + 11\frac{1}{2} + 12\frac{1}{4} = 11$$

Das Partitionstheorem

Sei Ω disjunkte Vereinigung der Ereignisse $B_1, \ldots, B_k$, d.h.

- $\Omega = \bigcup_{i=1}^{k} B_i$,
- $B_i \cap B_j = \emptyset, 1 \leq i < j \leq k$.

Dann gilt

$$E(X) = \sum_{i=1}^{k} E(X|B_i)\,\mathrm{prob}(B_i)$$

$$
\begin{aligned}
B_1 &= \text{“Sechserpasch”} \\
B_2 &= \text{“Erster Würfel 6, zweiter nicht”} \\
B_3 &= \text{“Zweiter Würfel 6, erster nicht”} \\
B_4 &= \text{”Keine 6”}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(X|B_1) &= 12 \text{ (kein Zufall mehr\ldots)} \\
E(X|B_2) &= 6+3=9 \text{ (zweiter Würfel fünfseitig)} \\
E(X|B_3) &= 3+6=9 \text{ (erster Würfel fünfseitig)} \\
E(X|B_4) &= 3+3=6 \text{ (beide Würfel fünfseitig)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{prob}(B_1) &= 1/36 \\
\text{prob}(B_2) &= 1/6 \cdot 5/6 = 5/36 \\
\text{prob}(B_3) &= 1/6 \cdot 5/6 = 5/36 \\
\text{prob}(B_4) &= 25/36
\end{aligned}
$$

$$
12 \cdot \frac{1}{36} + 9 \cdot \frac{5}{36} + 9 \cdot \frac{5}{36} + 6 \cdot \frac{25}{36} = 7
$$

Der unendliche Fall

- $|\Omega| = \infty$
- Nicht jede Teilmenge von Ω muss ein Ereignis sein
- Nur Ereignisse haben sinnvolle Wahrscheinlichkeiten

"Wie oft muss eine Münze im Durschnitt geworfen werden, bis Zahl erscheint?"

- $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ (alle unendlichen Kopf-Zahl-Folgen)
- Annahme: $\text{prob}(\omega_i) = p, \forall i \in I\!N$

$$\left.\begin{array}{rcl} p = 0 & \Rightarrow & \sum_{i \in N} \text{prob}(\omega_i) = 0 \\ p > 0 & \Rightarrow & \sum_{i \in N} \text{prob}(\omega_i) = \infty \end{array}\right\} \neq 1$$

Die ω_i sind keine Ereignisse!

ZV im unendlichen Fall

$X : \Omega \to I\!R$ ZV. Solange alle Mengen

$$\{X = z\} = \{\omega \in \Omega | X(\omega) = z\}$$

Ereignisse sind (d.h. sinnvolle Wahrscheinlichkeiten haben), geht alles (im wesentlichen) wie im endlichen Fall!

“Münzwurf” :

$X(\omega)$ =Anzahl Würfe bis zur ersten Zahl

- $\{X = i\} \quad = \quad \{\omega | \omega = \underbrace{K \dots K}_{i-1} Z * * \dots\}$
- prob$(X = i) = (\frac{1}{2})^i, \quad z \geq 1$
- $E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} i(\frac{1}{2})^i = 2$

Unfaire Münzen

Kopf erscheine mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$, Zahl mit Wahrscheinlichkeit p.

X =Anzahl Würfe bis zur ersten Zahl

- prob$(X = i) = (1 - p)^{i-1}p, \quad z \geq 1$
- $E(X) = p\sum_{i=1}^{\infty} i(1 - p)^{i-1} = \frac{1}{p}$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} ix^{i-1} &= \frac{\partial}{\partial x}\sum_{i=1}^{\infty} x^i = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{1-x} - 1\right) \\
&= \frac{1}{(1-x)^2}
\end{aligned}$$