

Wahrscheinlichkeitsraum

Endlicher Fall:

- endliche Menge $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$
 - $\omega_i, i = 1, \dots, n$ sind *Elementarereignisse*
 - $\text{prob}(\omega_i) = p_i \geq 0$
 - $\sum_{i=1}^n p_i = 1$
-

Geordnete Würfelergebnisse mit zwei Würfeln

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (1, 6), (2, 2), \dots, (6, 6)\}$$

$$\text{prob}(a, b) = \begin{cases} 1/36, & a = b, \\ 1/18, & \text{sonst} \end{cases}$$

Ereignis

- Teilmenge $W \subseteq \Omega$
 - $\text{prob}(W) := \sum_{\omega \in W} \text{prob}(\omega)$
-

“Pasch” :

$$W = \{(1, 1), (2, 2), \dots, (6, 6)\}$$

$$\text{prob}(W) = 6 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$$

Zufallsvariable (ZV)

- Abbildung $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$
 - Ereignis $\{X = z\} := \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = z\}$
 - $\{X \leq z\}, \{X \geq z\}$ entsprechend definiert
-

“Augensumme”:

$$X(a, b) := a + b$$

$$\{X = 7\} = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4)\}$$

$$\{X \leq 3\} = \{(1, 1), (1, 2)\}$$

Erwartungswert (EW) einer ZV

- $E(X) := \sum_{z \in X(\Omega)} z \cdot \text{prob}(X = z)$
-

z	$\{X = z\}$	$\text{prob}(X = z)$
2	$\{(1, 1)\}$	$1/36$
3	$\{(1, 2)\}$	$1/18$
4	$\{(1, 3), (2, 2)\}$	$1/12$
5	$\{(1, 4), (2, 3)\}$	$1/9$
6	$\{(1, 5), (2, 4), (3, 3)\}$	$5/36$
7	$\{(1, 6), (2, 5), (3, 4)\}$	$1/6$
8	$\{(2, 6), (3, 5), (4, 4)\}$	$5/36$
9	$\{(3, 6), (4, 5)\}$	$1/9$
10	$\{(4, 6), (5, 5)\}$	$1/12$
11	$\{(5, 6)\}$	$1/18$
12	$\{(6, 6)\}$	$1/36$

Erwartete Augensumme:

$$\begin{aligned} E(X) &= 2 \frac{1}{36} + 3 \frac{1}{18} + 4 \frac{1}{12} + 5 \frac{1}{9} + 6 \frac{5}{36} + 7 \frac{1}{6} \\ &+ 8 \frac{5}{36} + 9 \frac{1}{9} + 10 \frac{1}{12} + 11 \frac{1}{18} + 12 \frac{1}{36} = 7 \end{aligned}$$

Linearität des EW

Seien X, Y ZV; $s, t \in \mathbb{R}$

- $X + Y$ ist die ZV definiert durch

$$(X + Y)(\omega) := X(\omega) + Y(\omega)$$

- sX ist die ZV definiert durch

$$(sX)(\omega) := s \cdot X(\omega)$$

Es gilt:

$$E(sX + tY) = s \cdot E(X) + t \cdot E(Y).$$

$$X_a(a, b) := a, X_b(a, b) := b \quad (\Rightarrow X = X_a + X_b)$$

z	$\{X_a = z\}$	$\text{prob}(X_a = z)$
1	$\{(1, 1), \dots, (1, 6)\}$	$11/36$
2	$\{(2, 2), \dots, (2, 6)\}$	$9/36$
3	$\{(3, 3), \dots, (3, 6)\}$	$7/36$
4	$\{(4, 4), \dots, (4, 6)\}$	$5/36$
5	$\{(5, 5), (5, 6)\}$	$3/36$
6	$\{(6, 6)\}$	$1/36$

z	$\{X_b = z\}$	$\text{prob}(X_b = z)$
1	$\{(1, 1)\}$	$1/36$
2	$\{(1, 2), (2, 2)\}$	$3/36$
3	$\{(1, 3), \dots, (3, 3)\}$	$5/36$
4	$\{(1, 4), \dots, (4, 4)\}$	$7/36$
5	$\{(1, 5), \dots, (5, 5)\}$	$9/36$
6	$\{(1, 6), \dots, (6, 6)\}$	$11/36$

$$E(X_a) + E(X_b) = \frac{91}{36} + \frac{161}{36} = 7 = E(X)$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

W, B Ereignisse, $\text{prob}(B) \neq 0$

- $\text{prob}(W|B) := \text{prob}(W \cap B) / \text{prob}(B)$ ist die *bedingte* Wahrscheinlichkeit von W , *gegeben* B
-

“Pasch, gegeben kleinste Zahl mindestens 5”

$$W = \{(1, 1), (2, 2), \dots, (6, 6)\}$$

$$B = \{(5, 5), (5, 6), (6, 6)\}$$

$$W \cap B = \{(5, 5), (6, 6)\}$$

$$\text{prob}(W|B) = \frac{\text{prob}(W \cap B)}{\text{prob}(B)} = \frac{1/18}{1/9} = \frac{1}{2}$$

Bedingter Erwartungswert

X ZV, B Ereignis, $\text{prob}(B) \neq 0$

- $E(X|B) := \sum_{z \in X(\Omega)} z \cdot \text{prob}(X = z|B)$ ist der *bedingte* Erwartungswert von X , gegeben B
-

“Erw. Augensumme, geg. kleinste Zahl ≥ 5 ”

z	$\text{prob}(X = z B)$
10	$1/4$
11	$1/2$
12	$1/4$

$$E(X|B) = 10\frac{1}{4} + 11\frac{1}{2} + 12\frac{1}{4} = 11$$

Das Partitionstheorem

Sei Ω disjunkte Vereinigung der Ereignisse B_1, \dots, B_k , d.h.

- $\Omega = \bigcup_{i=1}^k B_i$,
- $B_i \cap B_j = \emptyset, 1 \leq i < j \leq k$.

Dann gilt

$$E(X) = \sum_{i=1}^k E(X|B_i) \text{prob}(B_i)$$

$B_1 =$ "Sechserpasch"

$B_2 =$ "Erster Würfel 6, zweiter nicht"

$B_3 =$ "Zweiter Würfel 6, erster nicht"

$B_4 =$ "Keine 6"

$E(X|B_1) = 12$ (kein Zufall mehr...)

$E(X|B_2) = 6 + 3 = 9$ (zweiter Würfel fünfseitig)

$E(X|B_3) = 3 + 6 = 9$ (erster Würfel fünfseitig)

$E(X|B_4) = 3 + 3 = 6$ (beide Würfel fünfseitig)

$\text{prob}(B_1) = 1/36$

$\text{prob}(B_2) = 1/6 \cdot 5/6 = 5/36$

$\text{prob}(B_3) = 1/6 \cdot 5/6 = 5/36$

$\text{prob}(B_4) = 25/36$

$$12 \cdot \frac{1}{36} + 9 \cdot \frac{5}{36} + 9 \cdot \frac{5}{36} + 6 \cdot \frac{25}{36} = 7$$

Der unendliche Fall

- $|\Omega| = \infty$
 - Nicht jede Teilmenge von Ω muss ein Ereignis sein
 - Nur Ereignisse haben sinnvolle Wahrscheinlichkeiten
-

“Wie oft muss eine Münze im Durchschnitt geworfen werden, bis Zahl erscheint?”

- $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ (alle unendlichen Kopf-Zahl-Folgen)
- Annahme: $\text{prob}(\omega_i) = p, \forall i \in \mathbb{N}$

$$\left. \begin{array}{l} p = 0 \Rightarrow \sum_{i \in \mathbb{N}} \text{prob}(\omega_i) = 0 \\ p > 0 \Rightarrow \sum_{i \in \mathbb{N}} \text{prob}(\omega_i) = \infty \end{array} \right\} \neq 1$$

Die ω_i sind keine Ereignisse!

ZV im unendlichen Fall

$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ZV. Solange alle Mengen

$$\{X = z\} = \{\omega \in \Omega | X(\omega) = z\}$$

Ereignisse sind (d.h. sinnvolle Wahrscheinlichkeiten haben), geht alles (im wesentlichen) wie im endlichen Fall!

“Münzwurf” :

$X(\omega)$ = Anzahl Würfe bis zur ersten Zahl

- $\{X = i\} = \{\omega | \omega = \underbrace{K \dots K}_{i-1} Z ** \dots\}$
- $\text{prob}(X = i) = (\frac{1}{2})^i, \quad z \geq 1$
- $E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} i(\frac{1}{2})^i = 2$

Unfaire Münzen

Kopf erscheine mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$,
Zahl mit Wahrscheinlichkeit p .

X = Anzahl Würfe bis zur ersten Zahl

- $\text{prob}(X = i) = (1 - p)^{i-1}p, \quad z \geq 1$
- $E(X) = p \sum_{i=1}^{\infty} i(1 - p)^{i-1} = \frac{1}{p}$

Beweis:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} ix^{i-1} &= \frac{\partial}{\partial x} \sum_{i=1}^{\infty} x^i = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{1-x} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{(1-x)^2} \end{aligned}$$