



Rekursion

Rekursive Funktionen, Korrektheit,
Terminierung, Rekursion vs.
Iteration, Sortieren



Mathematische Rekursion

- Viele mathematische Funktionen sind sehr natürlich *rekursiv* definierbar, d.h.
- die Funktion erscheint in ihrer eigenen Definition.



Mathematische Rekursion

- Viele mathematische Funktionen sind sehr natürlich *rekursiv* definierbar, d.h.
- die Funktion erscheint in ihrer eigenen Definition.

$$n! = \begin{cases} 1, & \text{falls } n \leq 1 \\ n \cdot (n-1)!, & \text{falls } n > 1 \end{cases}$$



Rekursion in C++

- o modelliert oft direkt die mathematische Rekursionsformel



Rekursion in C++

- o modelliert oft direkt die mathematische Rekursionsformel.

```
// POST: return value is n!  
unsigned int fac (const unsigned int n)  
{  
    if (n <= 1) return 1;  
    return n * fac(n-1); // n > 1  
}
```



Unendliche Rekursion

- ist so leicht zu erzeugen wie eine unendliche Schleife,
- sollte aber genauso vermieden werden.



Unendliche Rekursion

- ist so leicht zu erzeugen wie eine unendliche Schleife,
- sollte aber genauso vermieden werden.

```
void f()  
{  
    f(); // calls f(), calls f(), calls f(),...  
}
```



Terminierung von rekursiven Funktionsaufrufen

Wie bei Schleifen brauchen wir

- Fortschritt Richtung Terminierung

`fac(n) :`

terminiert sofort für $n \leq 1$, andernfalls wird die Funktion rekursiv mit Argument $< n$ aufgerufen.

Terminierung von rekursiven Funktionsaufrufen

Wie bei Schleifen brauchen wir

- o Fortschritt Richtung Terminierung

`fac(n)` :

terminiert sofort für $n \leq 1$, andernfalls wird die Funktion rekursiv mit Argument $< n$ aufgerufen.

↑
"n wird mit jedem Aufruf kleiner."



Auswertung rekursiver Funktionsaufrufe (z.B. `fac(3)`)

```
// POST: return value is n!  
unsigned int fac (const unsigned int n)  
{  
    if (n <= 1) return 1;  
    return n * fac(n-1); // n > 1  
}
```



Auswertung rekursiver Funktionsaufrufe (z.B. `fac(3)`)

```
// POST: return value is n!  
unsigned int fac (const unsigned int n)  
{ // n = 3  
    if (n <= 1) return 1;  
    return n * fac(n-1); // n > 1  
}
```

Initialisierung des formalen Arguments mit dem Wert des Aufrufarguments



Auswertung rekursiver Funktionsaufrufe (z.B. `fac(3)`)

```
// POST: return value is n!  
unsigned int fac (const unsigned int n)  
{ // n = 3  
    if (n <= 1) return 1;  
    return n * fac(n-1); // n > 1  
}
```

Ausführen des Funktionsrumpfs: Auswertung des Rückgabedruckausdrucks



Auswertung rekursiver Funktionsaufrufe (z.B. `fac(3)`)

```
// POST: return value is n!  
unsigned int fac (const unsigned int n)  
{ // n = 3  
    if (n <= 1) return 1;  
    return n * fac(n-1); // n > 1  
}
```

Ausführen des Funktionsrumpfs: Rekursiver Aufruf von `fac` mit
Aufrufargument `n-1 == 2`



Auswertung rekursiver Funktionsaufrufe (z.B. `fac(3)`)

```
// POST: return value is n!  
unsigned int fac (const unsigned int n)  
{ // n = 2  
    if (n <= 1) return 1;  
    return n * fac(n-1); // n > 1  
}
```

Initialisierung des formalen Arguments mit dem Wert des Aufrufarguments



Auswertung rekursiver Funktionsaufrufe (z.B. `fac(3)`)

```
// POST: return value is n!  
unsigned int fac (const unsigned int n)  
{ // n = 2  
    if (n <= 1) return 1;  
    return n * fac(n-1); // n > 1  
}
```

Es gibt jetzt zwei $n!$ Das von `fac(3)`, und das von `fac(2)`

Initialisierung *des* formalen Arguments mit dem Wert des Aufrufarguments



Auswertung rekursiver Funktionsaufrufe (z.B. `fac(3)`)

```
// POST: return value is n!  
unsigned int fac (const unsigned int n)  
{ // n = 2  
    if (n <= 1) return 1;  
    return n * fac(n-1); // n > 1  
}
```

Wir nehmen das Argument des *aktuellen* Aufrufs, `fac(2)`

Initialisierung *des* formalen Arguments mit dem Wert des Aufrufarguments



Der Aufrufstapel

Bei Auswertung jedes Funktionsaufrufs:

- Wert des Aufrufarguments kommt auf einen Stapel (**erst $n = 3$, dann $n = 2, \dots$**)
- es wird stets mit dem obersten Wert gearbeitet
- nach Ende des Funktionsaufrufs wird der oberste Wert vom Stapel gelöscht



Der Aufrufstapel

Bei Auswertung jedes Funktionsaufrufs:

- Wert des Aufrufarguments kommt auf einen Stapel (**erst $n = 3$, dann $n = 2, \dots$**)
- es wird stets mit dem obersten Wert gearbeitet
- nach Ende eines Funktionsaufrufs wird der oberste Wert vom Stapel gelöscht

Bei mehreren Argumenten analog (alle kommen auf den Stapel, wir arbeiten jeweils mit der obersten Version jedes Arguments)



Grösster gemeinsamer Teiler

Euklidischer Algorithmus

- findet den grössten gemeinsamen Teiler $\gcd(a, b)$ zweier natürlicher Zahlen a und b



Grösster gemeinsamer Teiler

Euklidischer Algorithmus

- findet den grössten gemeinsamen Teiler $\gcd(a, b)$ zweier natürlicher Zahlen a und b
- basiert auf folgendem Lemma (Beweis im Skript):

$$\gcd(a, b) = \gcd(b, a \bmod b) \quad \text{für } b > 0 .$$



Grösster gemeinsamer Teiler

```
// POST: return value is the greatest common
//       divisor of a and b
unsigned int gcd
    (const unsigned int a, const unsigned int b)
{
    if (b == 0) return a;
    return gcd(b, a % b); // b != 0
}
```



Grösster gemeinsamer Teiler

```
// POST: return value is the greatest common
//       divisor of a and b
unsigned int gcd
    (const unsigned int a, const unsigned int b)
{
    if (b == 0) return a;
    return gcd(b, a % b); // b != 0
}
```

Korrektheit: $\text{gcd}(a, 0) = a$

$\text{gcd}(a, b) \stackrel{\uparrow}{=} \text{gcd}(b, a \bmod b), \quad b > 0$

Lemma!



Grösster gemeinsamer Teiler

```
// POST: return value is the greatest common
//       divisor of a and b
unsigned int gcd
    (const unsigned int a, const unsigned int b)
{
    if (b == 0) return a;
    return gcd(b, a % b); // b != 0
}
```

Terminierung: $a \bmod b < b$, also wird b in jedem rekursiven Aufruf kleiner.



Grösster gemeinsamer Teiler

```
// POST: return value is the greatest common
//       divisor of a and b
unsigned int gcd
    (const unsigned int a, const unsigned int b)
{
    if (b == 0) return a;
    return gcd(b, a % b); // b != 0
}
```

Korrektheit *und* **Terminierung** müssen bei rekursiven Funktionen stets separat bewiesen werden!



Fibonacci-Zahlen

- $F_0 := 0$
- $F_1 := 1$
- $F_n := F_{n-1} + F_{n-2}, n > 1$



Fibonacci-Zahlen

- $F_0 := 0$
- $F_1 := 1$
- $F_n := F_{n-1} + F_{n-2}, n > 1$

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...





Fibonacci-Zahlen

```
// POST: return value is the n-th
//       Fibonacci number F_n
unsigned int fib (const unsigned int n)
{
    if (n == 0) return 0;
    if (n == 1) return 1;
    return fib(n-1) + fib(n-2); // n > 1
}
```



Fibonacci-Zahlen

```
// POST: return value is the n-th
//       Fibonacci number F_n
unsigned int fib (const unsigned int n)
{
    if (n == 0) return 0;
    if (n == 1) return 1;
    return fib(n-1) + fib(n-2); // n > 1
}
```

Korrektheit und Terminierung sind klar.



Fibonacci-Zahlen

```
// POST: return value is the n-th
//       Fibonacci number F_n
unsigned int fib (const unsigned int n)
{
    if (n == 0) return 0;
    if (n == 1) return 1;
    return fib(n-1) + fib(n-2); // n > 1
}
```

Laufzeit:

`fib (50)` dauert "ewig", denn es berechnet

F_{48} 2-mal, F_{47} 3-mal, F_{46} 5-mal,

F_{45} 8-mal, F_{44} 13-mal, ...



Rekursion und Iteration

Rekursion kann im Prinzip ersetzt werden durch

- Iteration (Schleifen) und
- expliziten Aufrufstapel (z.B. Feld).

Oft sind direkte rekursive Formulierungen einfacher, aber manchmal auch weniger effizient.



Endrekursion

Eine Funktion ist endrekursiv, wenn sie genau einen rekursiven Aufruf ganz am Ende enthält.



Endrekursion

Eine Funktion ist endrekursiv, wenn sie genau einen rekursiven Aufruf ganz am Ende enthält.

```
// POST: return value is the greatest common
//       divisor of a and b
unsigned int gcd
    (const unsigned int a, const unsigned int b)
{
    if (b == 0) return a;
    return gcd(b, a % b); // b != 0
}
```



Endrekursion

- o ist leicht iterativ zu schreiben.

```
// POST: return value is the greatest common divisor of a and b
unsigned int gcd2 (unsigned int a, unsigned int b)
{
    while (b != 0) {
        unsigned int a_prev = a;
        a = b;
        b = a_prev % b;
    }
    return a;
}
```



Endrekursion

- o ist leicht iterativ zu schreiben.

```
// POST: return value is the greatest common divisor of a and b
unsigned int gcd2 (unsigned int a, unsigned int b)
{
    while (b != 0) {
        unsigned int a_prev = a;
        a = b;
        b = a_prev % b;
    }
    return a;
}
```

$(a, b) \rightarrow (b, a \bmod b)$



Endrekursion

- o ist leicht iterativ zu schreiben.

```
// POST: return value is the greatest common divisor of a and b
unsigned int gcd2 (unsigned int a, unsigned int b)
{
    while (b != 0) {
        unsigned int a_prev = a;
        a = b;
        b = a_prev % b;
    }
    return a;
}
```

$(a, b) \rightarrow (b, a \bmod b)$



Endrekursion

- o ist leicht iterativ zu schreiben.

```
// POST: return value is the greatest common divisor of a and b
unsigned int gcd2 (unsigned int a, unsigned int b)
{
    while (b != 0) {
        unsigned int a_prev = a;
        a = b;
        b = a_prev % b;
    }
    return a;
}
```

$(a, b) \rightarrow (b, a \bmod b)$



Endrekursion

- o ist leicht iterativ zu schreiben.

```
// POST: return value is the greatest common divisor of a and b
unsigned int gcd2 (unsigned int a, unsigned int b)
{
    while (b != 0) {
        unsigned int a_prev = a;
        a = b;
        b = a_prev % b;
    }
    return a;
}
```

$(a, b) \rightarrow (b, a \bmod b)$

...aber die rekursive Version ist lesbarer und (fast) genauso effizient.



Fibonacci-Zahlen iterativ

Idee:

- berechne jede Zahl genau einmal, in der Reihenfolge $F_0, F_1, F_2, F_3, \dots$
- speichere die jeweils letzten beiden berechneten Zahlen (Variablen **a**, **b**), dann kann die nächste Zahl durch eine Addition erhalten werden.



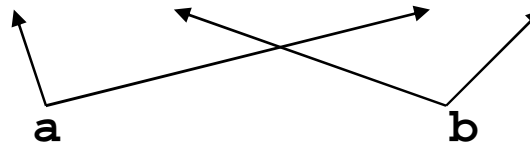
Fibonacci-Zahlen iterativ

```
// POST: return value is the n-th Fibonacci number F_n
unsigned int fib2 (const unsigned int n)
{
    if (n == 0) return 0;
    if (n <= 2) return 1;
    unsigned int a = 1; // F_1
    unsigned int b = 1; // F_2
    for (unsigned int i = 3; i <= n; ++i) {
        unsigned int a_prev = a; // F_{i-2}
        a = b; // F_{i-1}
        b += a_prev; // F_{i-1} += F_{i-2} -> F_i
    }
    return b;
}
```


Fibonacci-Zahlen iterativ

```
// POST: return value is the n-th Fibonacci number F_n
unsigned int fib2 (const unsigned int n)
{
    if (n == 0) return 0;
    if (n <= 2) return 1;
    unsigned int a = 1; // F_1
    unsigned int b = 1; // F_2
    for (unsigned int i = 3; i <= n; ++i) {
        unsigned int a_prev = a; // F_{i-2}
        a = b; // F_{i-1}
        b += a_prev; // F_{i-1} += F_{i-2} -> F_i
    }
    return b;
}
```

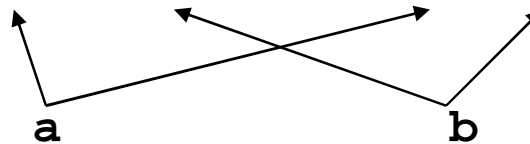
$(F_{i-2}, F_{i-1}) \rightarrow (F_{i-1}, F_i)$



Fibonacci-Zahlen iterativ

```
// POST: return value is the n-th Fibonacci number F_n
unsigned int fib2 (const unsigned int n)
{
    if (n == 0) return 0;
    if (n <= 2) return 1;
    unsigned int a = 1; // F_1
    unsigned int b = 1; // F_2
    for (unsigned int i = 3; i <= n; ++i) {
        unsigned int a_prev = a; // F_{i-2}
        a = b; // F_{i-1}
        b += a_prev; // F_{i-1} += F_{i-2} -> F_i
    }
    return b;
}
```

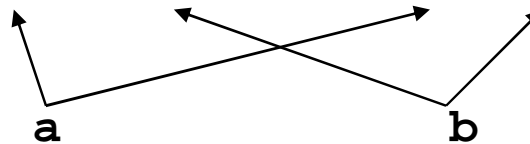
"(F_{i-2}, F_{i-1}) \rightarrow (F_{i-1}, F_i)"



Fibonacci-Zahlen iterativ

```
// POST: return value is the n-th Fibonacci number F_n
unsigned int fib2 (const unsigned int n)
{
    if (n == 0) return 0;
    if (n <= 2) return 1;
    unsigned int a = 1; // F_1
    unsigned int b = 1; // F_2
    for (unsigned int i = 3; i <= n; ++i) {
        unsigned int a_prev = a; // F_{i-2}
        a = b; // F_{i-1}
        b += a_prev; // F_{i-1} += F_{i-2} -> F_i
    }
    return b;
}
```

$(F_{i-2}, F_{i-1}) \rightarrow (F_{i-1}, F_i)$

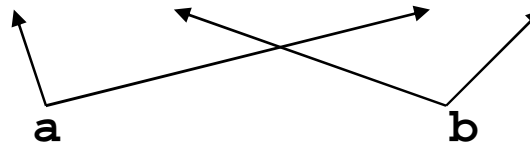


Fibonacci-Zahlen iterativ

```
// POST: return value is the n-th Fibonacci number F_n
unsigned int fib2 (const unsigned int n)
{
    if (n == 0) return 0;
    if (n <= 2) return 1;
    unsigned int a = 1; // F_1
    unsigned int b = 1; // F_2
    for (unsigned int i = 3; i <= n; ++i) {
        unsigned int a_prev = a; // F_{i-2}
        a = b; // F_{i-1}
        b += a_prev; // F_{i-1} += F_{i-2} -> F_i
    }
    return b;
}
```

sehr schnell auch bei fib2(50)

"(F_{i-2} , F_{i-1}) \rightarrow (F_{i-1} , F_i)"





Die Ackermann-Funktion

$$A(m, n) = \begin{cases} n + 1, & \text{falls } m = 0 \\ A(m-1, 1), & \text{falls } m > 0, n = 0 \\ A(m-1, A(m, n-1)), & \text{falls } m > 0, n > 0 \end{cases}$$



Die Ackermann-Funktion

$$A(m, n) = \begin{cases} n + 1, & \text{falls } m = 0 \\ A(m-1, 1), & \text{falls } m > 0, n = 0 \\ A(m-1, A(m, n-1)), & \text{falls } m > 0, n > 0 \end{cases}$$

- ist *berechenbar*, aber *nicht primitiv rekursiv* (man dachte Anfang des 20. Jahrhunderts, dass es diese Kombination gar nicht gibt)
- wächst *extrem* schnell



Die Ackermann-Funktion

```
// POST: return value is the Ackermann function
//      value A(m,n)
unsigned int A
    (const unsigned int m, const unsigned int n) {
    if (m == 0) return n+1;
    if (n == 0) return A(m-1,1);
    return A(m-1, A(m, n-1));
}
```



Die Ackermann-Funktion

	0	1	2	3	...	n
0	1	2	3	4	...	$n+1$
1						
2						
3						
4						

m

n



Die Ackermann-Funktion

	0	1	2	3	...	n
0	1	2	3	4	...	$n+1$
1	2	3	4	5	...	$n+2$
2						
3						
4						

m

n



Die Ackermann-Funktion

	0	1	2	3	...	n
0	1	2	3	4	...	$n+1$
1	2	3	4	5	...	$n+2$
2	3	5	7	9	...	$2n+3$
3						
4						

m

n



Die Ackermann-Funktion

	0	1	2	3	...	n
0	1	2	3	4	...	$n+1$
1	2	3	4	5	...	$n+2$
2	3	5	7	9	...	$2n+3$
3	5	13	29	61	...	$2^{n+3}-3$
4						

m

n

Die Ackermann-Funktion

m

	0	1	2	3	...	n
0	1	2	3	4	...	$n+1$
1	2	3	4	5	...	$n+2$
2	3	5	7	9	...	$2n+3$
3	5	13	29	61	...	$2^{n+3}-3$
4	13	65533	$2^{65536}-3$	$2^{2^{65536}}-3$...	$2^{2^{\dots^2}}-3$

n

Turm von $n+3$ Zweierpotenzen

Die Ackermann-Funktion

	0	1	2	3	...	n	
	0	1	2	3	4	...	$n+1$
	1	2	3	4	5	...	$n+2$
m	2	3	5	7	9	...	$2n+3$
	3	5	13	29	61	...	$2^{n+3}-3$
	4	13	65533	$2^{65536}-3$	$2^{2^{65536}}-3$...	$2^{2^{\dots^2}}-3$

n nicht mehr praktisch berechenbar

Die Ackermann-Funktion - Moral



- Rekursion ist sehr mächtig...
- ... aber auch gefährlich:

Die Ackermann-Funktion - Moral



- Rekursion ist sehr mächtig...
- ... aber auch gefährlich:

Es ist leicht, harmlos aussehende rekursive Funktionen hinzuschreiben, die theoretisch korrekt sind und terminieren, praktisch aber jeden Berechenbarkeitsrahmen sprengen.



Sortieren

- Wie schnell kann man n Zahlen (oder Wörter,...) aufsteigend sortieren?



Sortieren

- Wie schnell kann man n Zahlen (oder Wörter,...) aufsteigend sortieren?
- Wir haben in den Übungen bereits sortiert, uns aber keine Gedanken über die Effizienz gemacht



Sortieren

- Wie schnell kann man n Zahlen (oder Wörter,...) aufsteigend sortieren?
- Wir haben in den Übungen bereits sortiert, uns aber keine Gedanken über die Effizienz gemacht
- Das holen wir jetzt nach, denn Sortieren ist eine der grundlegenden Operationen in der Informatik



Minimum-sort

- ist ein sehr einfaches Sortierverfahren
- haben einige wahrscheinlich in den Übungen implementiert



Minimum-sort

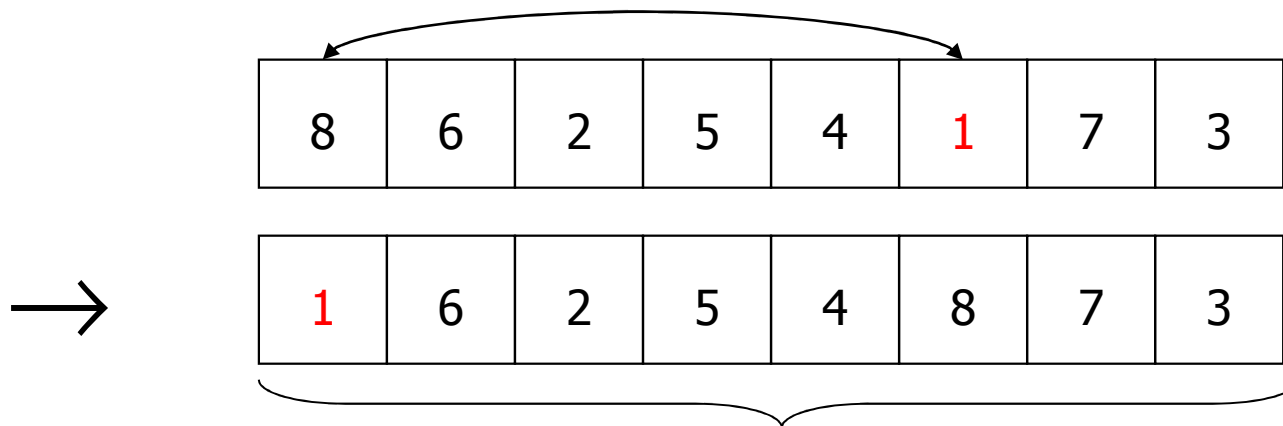
- ist ein sehr einfaches Sortierverfahren
- haben einige wahrscheinlich in den Übungen implementiert

8	6	2	5	4	1	7	3
---	---	---	---	---	---	---	---

Finde die kleinste Zahl...

Minimum-sort

- ist ein sehr einfaches Sortierverfahren
- haben einige wahrscheinlich in den Übungen implementiert



...und vertausche sie mit der ersten Zahl.



Minimum-sort

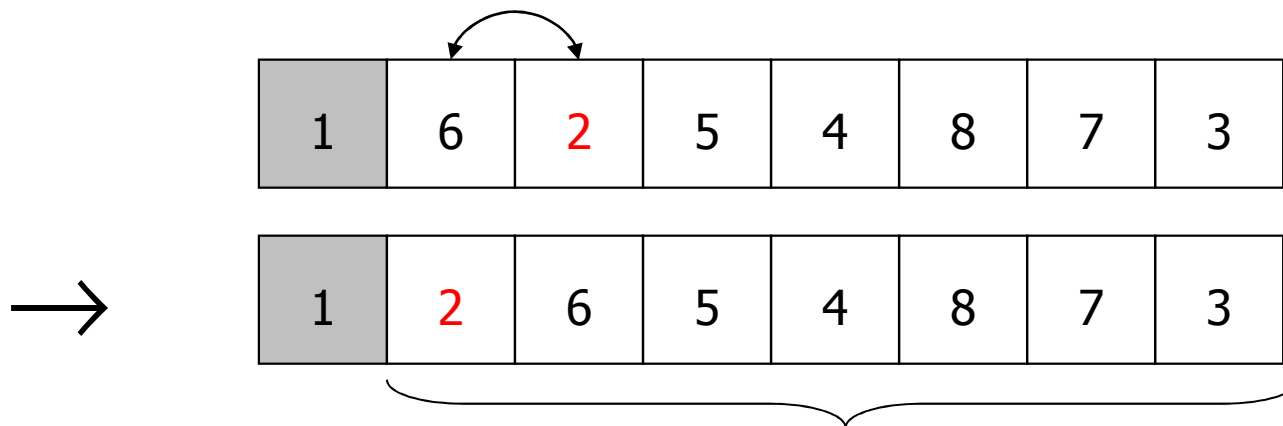
- ist ein sehr einfaches Sortierverfahren
- haben einige wahrscheinlich in den Übungen implementiert

1	6	2	5	4	8	7	3
---	---	---	---	---	---	---	---

Finde die kleinste Zahl...

Minimum-sort

- ist ein sehr einfaches Sortierverfahren
- haben einige wahrscheinlich in den Übungen implementiert



...und vertausche sie mit der ersten Zahl.



Minimum-sort

- ist ein sehr einfaches Sortierverfahren
- haben einige wahrscheinlich in den Übungen implementiert

1	2	6	5	4	8	7	3
---	---	---	---	---	---	---	---

Finde die kleinste Zahl...



Minimum-sort

- ist ein sehr einfaches Sortierverfahren
- haben einige wahrscheinlich in den Übungen implementiert

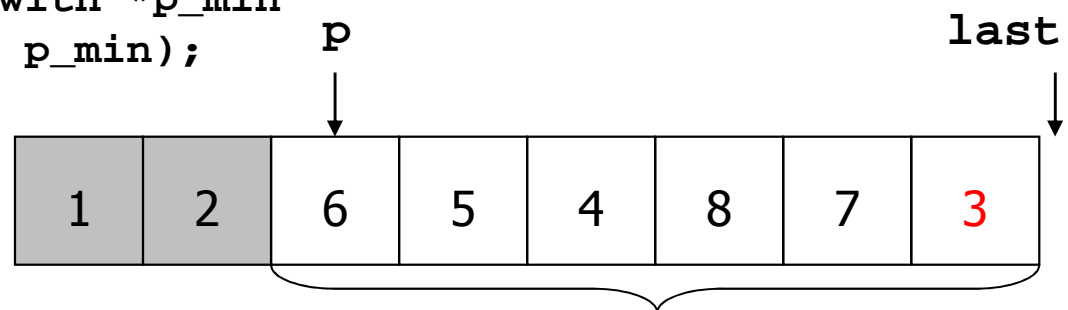
1	2	6	5	4	8	7	3
---	---	---	---	---	---	---	---

Finde die kleinste Zahl...

USW....

Minimum-sort

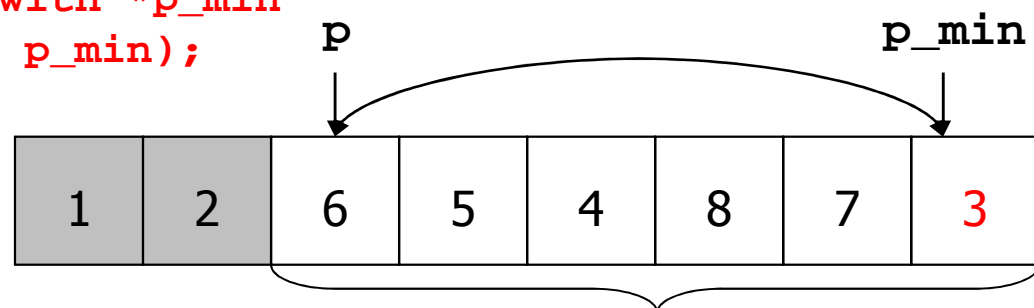
```
// PRE: [first, last) is a valid range
// POST: the elements *p, p in [first, last) are in
//       ascending order
void minimum_sort (int* first, int* last)
{
    for (int* p = first; p != last; ++p) {
        // find minimum in nonempty range described by [p, last)
        int* p_min = p; // pointer to current minimum
        int* q = p;     // pointer to current element
        while (++q != last)
            if (*q < *p_min) p_min = q;
        // interchange *p with *p_min
        std::iter_swap (p, p_min);
    }
}
```



Finde die kleinste Zahl...

Minimum-sort

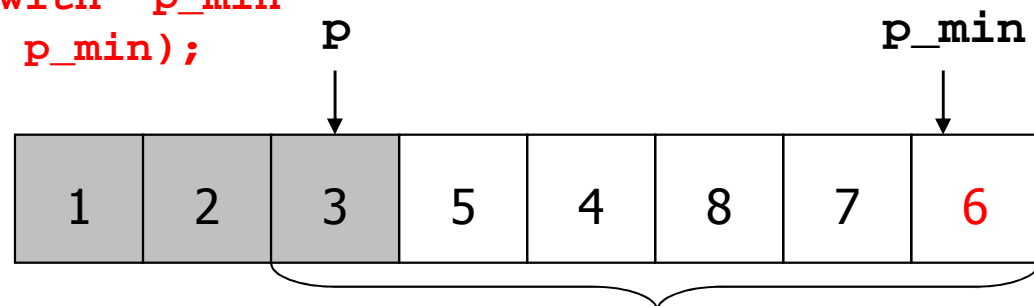
```
// PRE: [first, last) is a valid range
// POST: the elements *p, p in [first, last) are in
//       ascending order
void minimum_sort (int* first, int* last)
{
    for (int* p = first; p != last; ++p) {
        // find minimum in nonempty range described by [p, last)
        int* p_min = p; // pointer to current minimum
        int* q = p;    // pointer to current element
        while (++q != last)
            if (*q < *p_min) p_min = q;
        // interchange *p with *p_min
        std::iter_swap (p, p_min);
    }
}
```



..und vertausche sie mit der ersten Zahl

Minimum-sort

```
// PRE: [first, last) is a valid range
// POST: the elements *p, p in [first, last) are in
//       ascending order
void minimum_sort (int* first, int* last)
{
    for (int* p = first; p != last; ++p) {
        // find minimum in nonempty range described by [p, last)
        int* p_min = p; // pointer to current minimum
        int* q = p;     // pointer to current element
        while (++q != last)
            if (*q < *p_min) p_min = q;
        // interchange *p with *p_min
        std::iter_swap (p, p_min);
    }
}
```

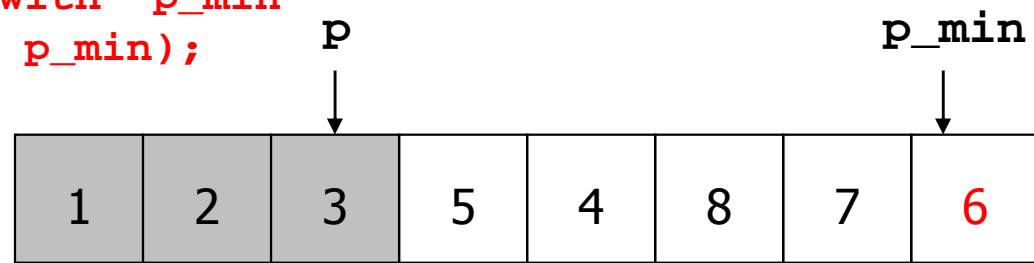


..und vertausche sie mit der ersten Zahl

Minimum-sort

```
// PRE: [first, last) is a valid range
// POST: the elements *p, p in [first, last) are in
//       ascending order
void minimum_sort (int* first, int* last)
{
    for (int* p = first; p != last; ++p) {
        // find minimum in nonempty range described by [p, last)
        int* p_min = p; // pointer to current minimum
        int* q = p;     // pointer to current element
        while (++q != last)
            if (*q < *p_min) p_min = q;
        // interchange *p with *p_min
        std::iter_swap (p, p_min);
    }
}
```

```
#include<algorithm>
```



..und vertausche sie mit der ersten Zahl



Minimum-sort: Laufzeit

- hängt von der Plattform ab.



Minimum-sort: Laufzeit

- hängt von der Plattform ab
- Trotzdem gibt es ein plattformunabhängiges Laufzeitmass:

Anzahl der Vergleiche `*q < *p_min`



Minimum-sort: Laufzeit

- hängt von der Plattform ab
- Trotzdem gibt es ein plattformunabhängiges Laufzeitmass:

Anzahl der Vergleiche $*q < *p_{min}$

- Anzahl anderer Operationen ist wesentlich kleiner oder proportional dazu



Minimum-sort: Laufzeit

```
// PRE: [first, last) is a valid range
// POST: the elements *p, p in [first, last) are in
//       ascending order
void minimum_sort (int* first, int* last)
{
    for (int* p = first; p != last; ++p) {
        // find minimum in nonempty range described by [p, last)
        int* p_min = p; // pointer to current minimum
        int* q = p;    // pointer to current element
        while (++q != last)
            if (*q < *p_min) p_min = q;
        // interchange *p with *p_min
        std::iter_swap (p, p_min);
    }
}
```

n Elemente

$$n-1 + n-2 + \dots + 1 \text{ Vergleiche} = n(n-1)/2$$

Minimum-sort: Laufzeit

```
// PRE: [first, last) is a valid range
// POST: the elements *p, p in [first, last) are in
//       ascending order
void minimum_sort (int* first, int* last)
{
    for (int* p = first; p != last; ++p) {
        // find minimum in nonempty range described by [p, last)
        int* p_min = p; // pointer to current minimum
        int* q = p;     // pointer to current element
        while (++q != last)
            if (*q < *p_min) p_min = q;
        // interchange *p with *p_min
        std::iter_swap (p, p_min);
    }
}
```

n Elemente

jeweils $\leq n$ Operationen (wesentlich kleiner)



Minimum-sort: Laufzeit

```
// PRE: [first, last) is a valid range
// POST: the elements *p, p in [first, last) are in
//       ascending order
void minimum_sort (int* first, int* last)
{
    for (int* p = first; p != last; ++p) {
        // find minimum in nonempty range described by [p, last)
        int* p_min = p; // pointer to current minimum
        int* q = p;     // pointer to current element
        while (++q != last)
            if (*q < *p_min) p_min = q;
        // interchange *p with *p_min
        std::iter_swap (p, p_min);
    }
}
```

n Elemente

höchstens $n(n-1)/2$ Operationen (proportional)



Minimum-sort: Laufzeit

```
// PRE: [first, last) is a valid range
// POST: the elements *p, p in [first, last) are in
//       ascending order
void minimum_sort (int* first, int* last)
{
    for (int* p = first; p != last; ++p) {
        // find minimum in nonempty range described by [p, last)
        int* p_min = p; // pointer to current minimum
        int* q = p;     // pointer to current element
        while (++q != last)
            if (*q < *p_min) p_min = q;
        // interchange *p with *p_min
        std::iter_swap (p, p_min);
    }
}
```

n Elemente

$n(n-1)/2 + n$ Operationen (proportional)



Minimum-sort: Laufzeit

- Auf "jeder" Plattform: Gesamtlaufzeit ist proportional zur Zeit, die mit den Vergleichen $*q < *p_min$ verbraucht wird



Minimum-sort: Laufzeit

- Auf "jeder" Plattform: Gesamtlaufzeit ist proportional zur **Zeit, die mit den Vergleichen $*q < *p_{min}$ verbraucht wird**
- Diese wiederum ist proportional zur Anzahl $n(n-1)/2$ dieser Vergleiche



Minimum-sort: Laufzeit

- Auf "jeder" Plattform: Gesamtlaufzeit ist proportional zur **Zeit, die mit den Vergleichen $*q < *p_{min}$ verbraucht wird**
- Diese wiederum ist proportional zur Anzahl $n(n-1)/2$ dieser Vergleiche
- Anzahl der Vergleiche ist deshalb ein gutes Mass für die Gesamtlaufzeit!



Minimum-sort: Laufzeit (Mac) auf zufälliger Eingabe

n	100,000	200,000	400,000	800,000	1,600,000
Gcomp (Milliarden Vergleiche)	5	20	80	320	1280
Laufzeit in min : s	0:15	1:05	4:26	15:39	64:22
Laufzeit / GComp (s)	3.0	3.25	3.325	2.93	3.01

Minimum-sort: Laufzeit (Mac) auf zufälliger Eingabe

n	100,000	200,000	400,000	800,000	1,600,000
Gcomp (Milliarden Vergleiche)	5	20	80	320	1280
Laufzeit in min : s	0:15	1:05	4:26	15:39	64:22
Laufzeit / GComp (s)	3.0	3.25	3.325	2.93	3.01

Ungefähr konstant! Anzahl Vergleiche *ist* ein gutes Laufzeitmass!

Minimum-sort: Laufzeit (Mac) auf zufälliger Eingabe

n	100,000	200,000	400,000	800,000	1,600,000
Gcomp (Milliarden Vergleiche)	5	20	80	320	1280
Laufzeit in min : s	0:15	1:05	4:26	15:39	64:22
Laufzeit / GComp (s)	3.0	3.25	3.325	2.93	3.01

D.h.: für 10,000,000 Zahlen bräuchte Minimum-sort ca. 2 Tage!



Merge-sort

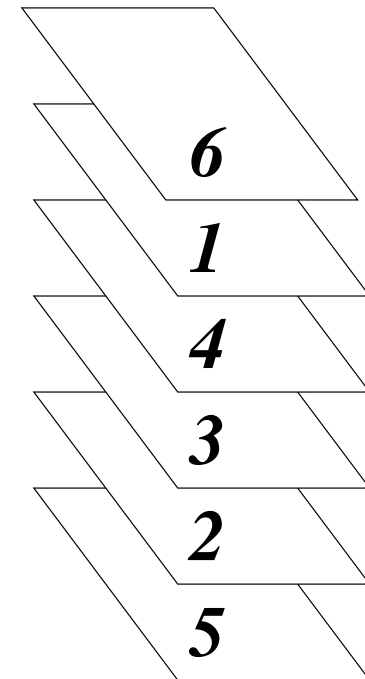
- ein schnelleres (und rekursives) Sortierverfahren
- folgt dem Paradigma "Teile und Herrsche" (Divide & Conquer)

Teile das Problem in kleinere Teilprobleme des gleichen Typs auf, löse diese rekursiv, und berechne die Gesamtlösung aus den Lösungen der Teilprobleme



Merge-sort

- Analogie: Sortieren eines Kartenstapels
- Karten sind mit Zahlen beschriftet

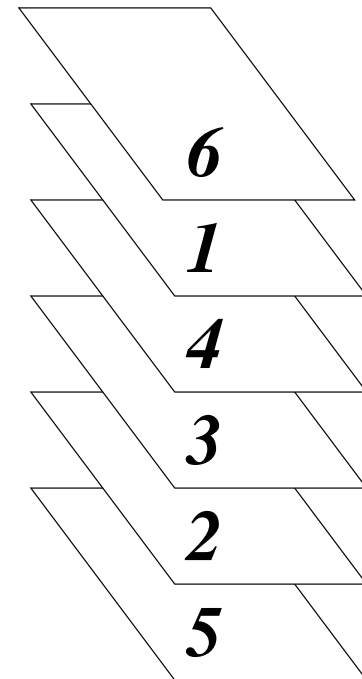
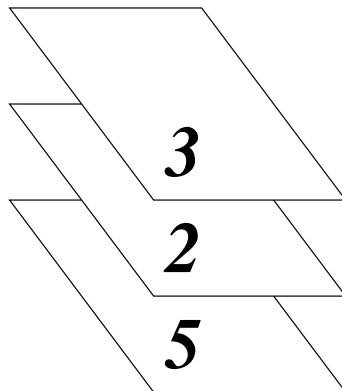
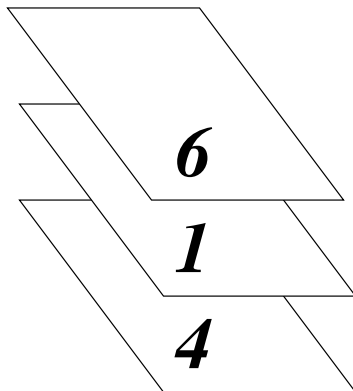




Merge-sort: Teile

- Analogie: Sortieren eines Kartenstapels
- Karten sind mit Zahlen beschriftet

Schritt 1: Teile den Stapel in zwei gleich grosse Stapel

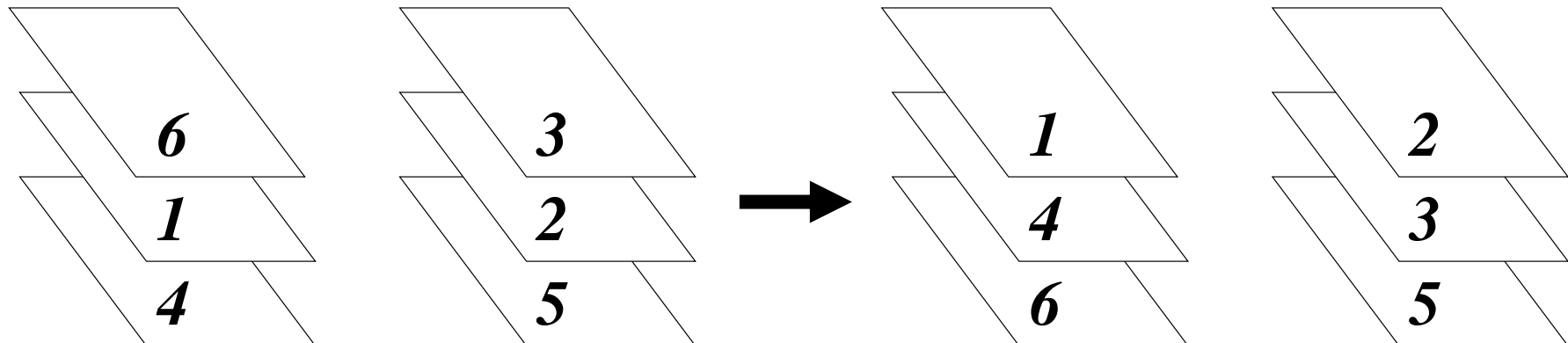




Merge-sort: Teile

- Analogie: Sortieren eines Kartenstapels
- Karten sind mit Zahlen beschriftet

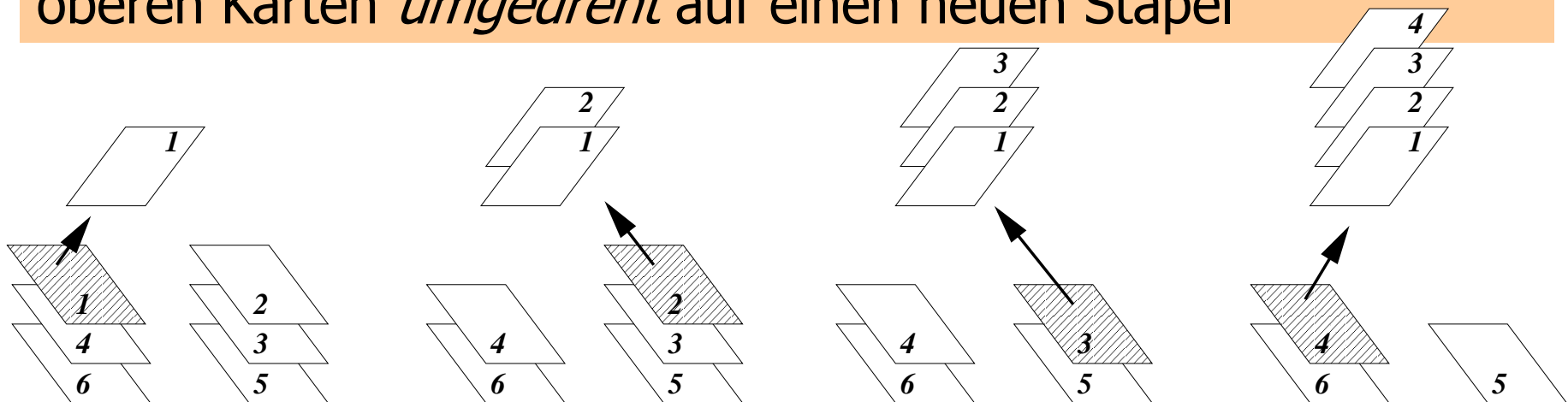
Schritt 2: Sortiere beide Stapel getrennt



Merge-sort: Herrsche

- Analogie: Sortieren eines Kartenstapels
- Karten sind mit Zahlen beschriftet

Schritt 3: Mische die beiden sortierten Stapel zu einem sortierten Stapel: lege dazu jeweils die kleinere der beiden oberen Karten *umgedreht* auf einen neuen Stapel





Merge-sort in C++

```
// PRE: [first, last) is a valid range
// POST: the elements *p, p in [first, last) are in
//       ascending order
void merge_sort (int* first, int* last)
{
    int n = last - first;
    if (n <= 1) return;           // nothing to do
    int* middle = first + n/2;
    merge_sort (first, middle);  // sort first half
    merge_sort (middle, last);   // sort second half
    merge (first, middle, last); // merge both halves
}
```




Merge-sort in C++: Teile

```
// PRE: [first, last) is a valid range
// POST: the elements *p, p in [first, last) are in
//       ascending order
void merge_sort (int* first, int* last)
{
    int n = last - first;
    if (n <= 1) return;           // nothing to do
    int* middle = first + n/2;
    merge_sort (first, middle);  // sort first half
    merge_sort (middle, last);   // sort second half
    merge (first, middle, last); // merge both halves
}
```

$\lfloor n/2 \rfloor$ Elemente ($n/2$ abgerundet)

$\lceil n/2 \rceil$ Elemente ($n/2$ aufgerundet)



Merge-sort in C++: Herrsche

```
// PRE: [first, last) is a valid range
// POST: the elements *p, p in [first, last) are in
//       ascending order
void merge_sort (int* first, int* last)
{
    int n = last - first;
    if (n <= 1) return;           // nothing to do
    int* middle = first + n/2;
    merge_sort (first, middle);  // sort first half
    merge_sort (middle, last);   // sort second half
    merge (first, middle, last); // merge both halves
}
```

↑
Diese Funktion übernimmt das Mischen zu einem Stapel



Die Merge-Funktion

```
// PRE: [first, middle), [middle, last) are valid ranges; in
//      both of them, the elements are in ascending order
void merge (int* first, int* middle, int* last)
{
    int n = last - first;    // total number of cards
    int* deck = new int[n]; // new deck to be built

    int* left = first;      // top card of left deck
    int* right = middle;    // top card of right deck
    for (int* d = deck; d != deck + n; ++d)
        // put next card onto new deck
        if (left == middle) *d = *right++; // left deck is empty
        else if (right == last) *d = *left++; // right deck is empty
        else if (*left < *right) *d = *left++; // smaller top card left
        else *d = *right++; // smaller top card right

    // copy new deck back into [first, last)
    int *d = deck;
    while (first != middle) *first++ = *d++;
    while (middle != last) *middle++ = *d++;

    delete[] deck;
}
```



Merge-sort: Laufzeit

- ist wieder proportional zur Anzahl der Vergleiche `*left < *right` (das muss man aber nicht sofort sehen)
- Alle Vergleiche werden von der Funktion `merge` durchgeführt



Merge-sort: Laufzeit

- ist wieder proportional zur Anzahl der Vergleiche `*left < *right` (das muss man aber nicht sofort sehen)
- Alle Vergleiche werden von der Funktion `merge` durchgeführt

Beim Mischen zweier Stapel zu einem Stapel der Grösse n braucht `merge` höchstens $n - 1$ Vergleiche (maximal einer für jede Karte des neuen Stapels, ausser der letzten)



Merge-sort: Laufzeit

Satz:

Die Funktion `merge_sort` sortiert eine Folge von $n \geq 1$ Zahlen mit höchstens

$$(n - 1) \lceil \log_2 n \rceil$$

Vergleichen zwischen zwei Zahlen.



Merge-sort: Laufzeit

Beweis:

$T(n)$ sei die *maximal* mögliche Anzahl von Vergleichen zwischen Zahlen, die beim Sortieren von n Zahlen mit `merge_sort` auftreten können.



Merge-sort: Laufzeit

Beweis:

$T(n)$ sei die *maximal* mögliche Anzahl von Vergleichen zwischen Zahlen, die beim Sortieren von n Zahlen mit `merge_sort` auftreten können.

- $T(0) = T(1) = 0$



Merge-sort: Laufzeit

Beweis:

$T(n)$ sei die *maximal* mögliche Anzahl von Vergleichen zwischen Zahlen, die beim Sortieren von n Zahlen mit `merge_sort` auftreten können.

- $T(0) = T(1) = 0$
- $T(2) = 1$



Merge-sort: Laufzeit

Beweis:

$T(n)$ sei die *maximal* mögliche Anzahl von Vergleichen zwischen Zahlen, die beim Sortieren von n Zahlen mit `merge_sort` auftreten können.

- $T(0) = T(1) = 0$
- $T(2) = 1$
- $T(3) = 2$



Merge-sort: Laufzeit

Beweis:

$T(n)$ sei die *maximal* mögliche Anzahl von Vergleichen zwischen Zahlen, die beim Sortieren von n Zahlen mit `merge_sort` auftreten können.

- $$T(n) \leq T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + n - 1$$

für $n \geq 2$



Merge-sort: Laufzeit

Beweis:

$T(n)$ sei die *maximal* mögliche Anzahl von Vergleichen zwischen Zahlen, die beim Sortieren von n Zahlen mit `merge_sort` auftreten können.

$$\circ T(n) \leq T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + n - 1$$

für $n \geq 2$

maximale Anzahl im linken Stapel

maximale Anzahl im rechten Stapel

maximale Anzahl beim Mischen



Merge-sort: Laufzeit

- Mit vollständiger Induktion beweisen wir nun (für $n \geq 1$) die Aussage

$$T(n) \leq (n - 1) \lceil \log_2 n \rceil$$



Merge-sort: Laufzeit

- Mit vollständiger Induktion beweisen wir nun (für $n \geq 1$) die Aussage

$$T(n) \leq (n - 1) \lceil \log_2 n \rceil$$

- $n=1$: $T(1) = 0 = (1 - 0) \lceil \log_2 1 \rceil$





Merge-sort: Laufzeit

- Sei nun $n \geq 2$ und gelte die Aussage für alle Werte in $\{1, \dots, n-1\}$ (Induktionsannahme)



Merge-sort: Laufzeit

- Sei nun $n \geq 2$ und gelte die Aussage für alle Werte in $\{1, \dots, n-1\}$ (Induktionsannahme)
- Zu zeigen ist, dass die Aussage dann auch für n gilt (Induktionsschritt)



Merge-sort: Laufzeit

- Es gilt

$$T(n) \leq T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + n - 1$$

≥ 1 und $< n$



Merge-sort: Laufzeit

- o Es gilt

$$\begin{aligned} T(n) &\leq T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + n - 1 \\ &\leq (\lfloor n/2 \rfloor - 1) \lceil \log_2 \lfloor n/2 \rfloor \rceil + \\ &\quad (\lceil n/2 \rceil - 1) \lceil \log_2 \lceil n/2 \rceil \rceil + n - 1 \end{aligned}$$

Induktionsannahme



Merge-sort: Laufzeit

- Es gilt

$$\begin{aligned} T(n) &\leq T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + n - 1 \\ &\leq (\lfloor n/2 \rfloor - 1) \lceil \log_2 \lfloor n/2 \rfloor \rceil + \\ &\quad (\lceil n/2 \rceil - 1) \lceil \log_2 \lceil n/2 \rceil \rceil + n - 1 \\ &\leq (\lfloor n/2 \rfloor - 1) (\lceil \log_2 n \rceil - 1) + \\ &\quad (\lceil n/2 \rceil - 1) (\lceil \log_2 n \rceil - 1) + n - 1 \end{aligned}$$



Merge-sort: Laufzeit

- o Es gilt

$$\begin{aligned} T(n) &\leq T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + n - 1 \\ &\leq (\lfloor n/2 \rfloor - 1) \lceil \log_2 \lfloor n/2 \rfloor \rceil + \\ &\quad (\lceil n/2 \rceil - 1) \lceil \log_2 \lceil n/2 \rceil \rceil + n - 1 \\ &\leq \boxed{(\lfloor n/2 \rfloor - 1)} (\lceil \log_2 n \rceil - 1) + \\ &\quad \boxed{(\lceil n/2 \rceil - 1)} (\lceil \log_2 n \rceil - 1) + n - 1 \\ &= \boxed{(n - 2)} (\lceil \log_2 n \rceil - 1) + n - 1 \end{aligned}$$



Merge-sort: Laufzeit

- o Es gilt

$$\begin{aligned} T(n) &\leq T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + n - 1 \\ &\leq (\lfloor n/2 \rfloor - 1) \lceil \log_2 \lfloor n/2 \rfloor \rceil + \\ &\quad (\lceil n/2 \rceil - 1) \lceil \log_2 \lceil n/2 \rceil \rceil + n - 1 \\ &\leq \boxed{(\lfloor n/2 \rfloor - 1)} (\lceil \log_2 n \rceil - 1) + \\ &\quad \boxed{(\lceil n/2 \rceil - 1)} (\lceil \log_2 n \rceil - 1) + n - 1 \\ &\leq \boxed{(n - 1)} (\lceil \log_2 n \rceil - 1) + n - 1 \end{aligned}$$



Merge-sort: Laufzeit

- o Es gilt

$$\begin{aligned} T(n) &\leq T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + n - 1 \\ &\leq (\lfloor n/2 \rfloor - 1) \lceil \log_2 \lfloor n/2 \rfloor \rceil + \\ &\quad (\lceil n/2 \rceil - 1) \lceil \log_2 \lceil n/2 \rceil \rceil + n - 1 \\ &\leq (\lfloor n/2 \rfloor - 1) (\lceil \log_2 n \rceil - 1) + \\ &\quad (\lceil n/2 \rceil - 1) (\lceil \log_2 n \rceil - 1) + n - 1 \\ &\leq (n - 1) (\lceil \log_2 n \rceil - 1) + n - 1 \\ &= (n - 1) (\lceil \log_2 n \rceil) \end{aligned}$$

Merge-sort: Laufzeit (PC) auf zufälliger Eingabe

n	100,000	200,000	400,000	800,000	1,600,000
Mcomp (Millionen Vergleiche)	1.7	3.6	7.6	16	33.6
Laufzeit in ms	46	93	190	390	834
Laufzeit / GComp (s)	27	25.8	25	24.4	25.1

merge_sort braucht 8-mal mehr Zeit pro Vergleich als minimum_sort...

Merge-sort: Laufzeit (PC) auf zufälliger Eingabe

n	100,000	200,000	400,000	800,000	1,600,000
Mcomp (Millionen Vergleiche)	1.7	3.6	7.6	16	33.6
Laufzeit in ms	46	93	190	390	834
Laufzeit / GComp (s)	27	25.8	25	24.4	25.1

> 1h bei minimum_sort

...ist aber aufgrund *sehr* viel weniger Vergleichen trotzdem sehr viel schneller!



Mit wievielen Vergleichen kann man n Zahlen sortieren?

- `minimum_sort`: $n(n-1)/2$
- `merge_sort`: $\leq (n - 1) (\lceil \log_2 n \rceil)$
- `optimal_sort`: ???



Mit wievielen Vergleichen kann man n Zahlen sortieren?

- `minimum_sort`: $n(n-1)/2$
- `merge_sort`: $\leq (n - 1) (\lceil \log_2 n \rceil)$
- `optimal_sort`: ???

Satz: jedes vergleichsbasierte Sortierverfahren braucht mindestens $\lceil \log_2(n!) \rceil \approx n \log_2 n - 1.44 n$ Vergleiche; also ist `merge_sort` fast optimal.



Mit wievielen Vergleichen kann man n Zahlen sortieren?

- `minimum_sort`: $n(n-1)/2$
- `merge_sort`: $\leq (n - 1) (\lceil \log_2 n \rceil)$
- `optimal_sort`: ???

Satz: jedes vergleichsbasierte Sortierverfahren braucht mindestens $\lceil \log_2(n!) \rceil \approx n \log_2 n - 1.44 n$ Vergleiche; also ist `merge_sort` fast optimal.

Aber: Anzahl der Vergleiche ist nur bedingt geeignet zur Vorhersage praktischer Effizienz. `quick_sort` : braucht etwas mehr Vergleiche, ist aber schneller