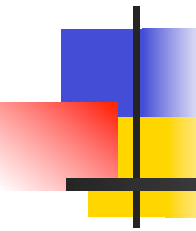
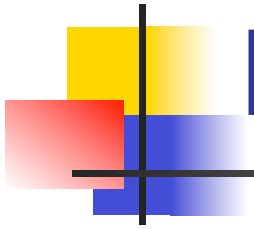


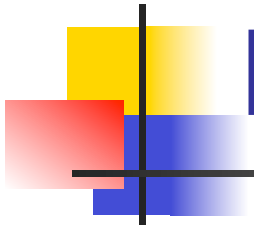
Binäre Suchbäume

Mengen, Funktionalität, Binäre Suchbäume, Heaps, Treaps



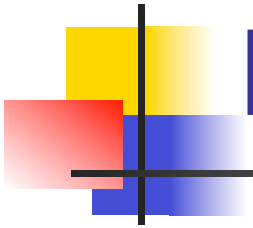
Mengen

- **Ziel:** Aufrechterhalten einer Menge (hier: ganzer Zahlen) unter folgenden Operationen:



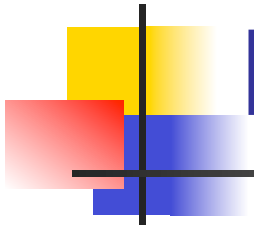
Mengen

- **Ziel:** Aufrechterhalten einer Menge (hier: ganzer Zahlen) unter folgenden Operationen:
  - Einfügen eines Elements
  - Löschen eines Elements



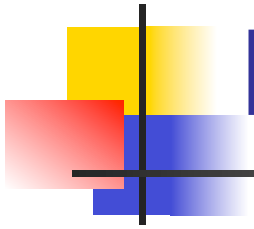
Mengen

- **Ziel:** Aufrechterhalten einer Menge (hier: ganzer Zahlen) unter folgenden Operationen:
  - Einfügen eines Elements
  - Löschen eines Elements
  - Suchen eines Elements



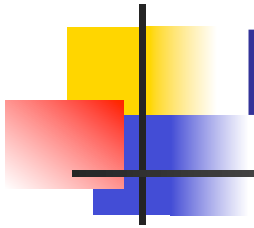
Mengen

- **Ziel:** Aufrechterhalten einer Menge (hier: ganzer Zahlen) unter folgenden Operationen:
  - Einfügen eines Elements
  - Löschen eines Elements
  - Suchen eines Elements
- **Anforderung:** effizient auch bei grossen Mengen!



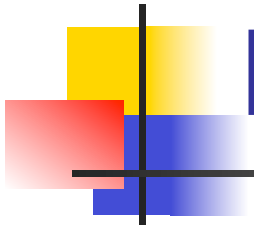
Mengen: Anwendungen (I)

- Telefonbuch (Menge von Namen mit zugehörigen Telefonnummern)
  - **Einfügen:** Neue Telefonanschlüsse
  - **Löschen:** Aufgegebene Telefonanschlüsse
  - **Suchen:** Telefonnummer einer Person



Mengen: Anwendungen (II)

- Nutzerverwaltung (Menge von Nutzern mit Passwörtern und/oder weiteren Informationen)
  - **Einfügen:** Neue Nutzer
  - **Löschen:** Ex-Nutzer
  - **Suchen:** Einloggen

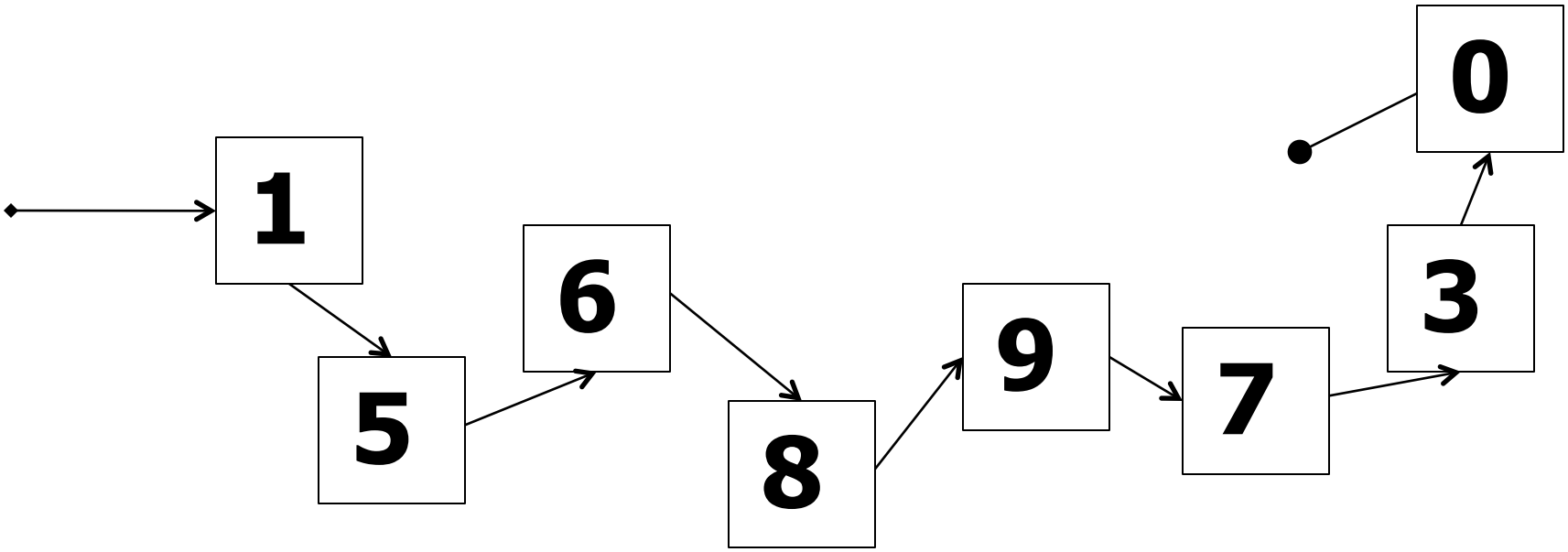


Mengen: Anwendungen (II)

- Nutzerverwaltung (Menge von Nutzern mit Passwörtern und/oder weiteren Informationen)
  - **Einfügen:** Neue Nutzer
  - **Löschen:** Ex-Nutzer
  - **Suchen:** Einloggen
- **Effizienz:** Keine Wartezeit beim Einloggen, auch bei Millionen von Nutzern.

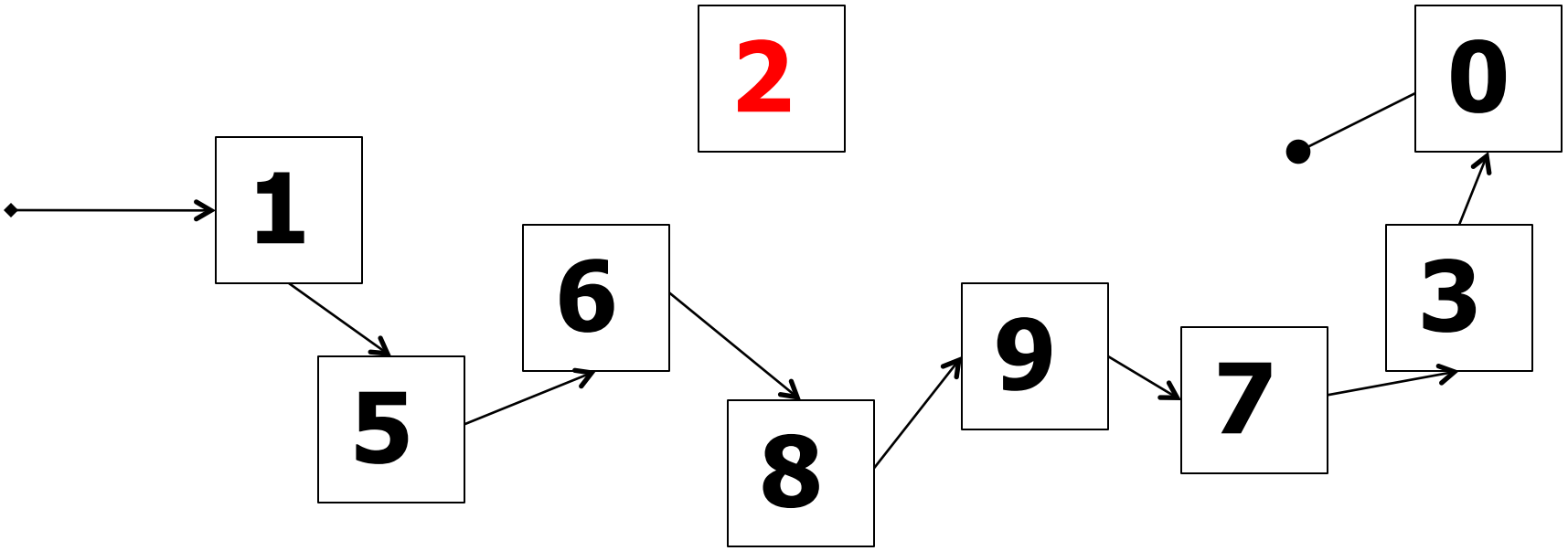
Mengen: Lösung mit Listen

- Menge wird als Liste gespeichert.



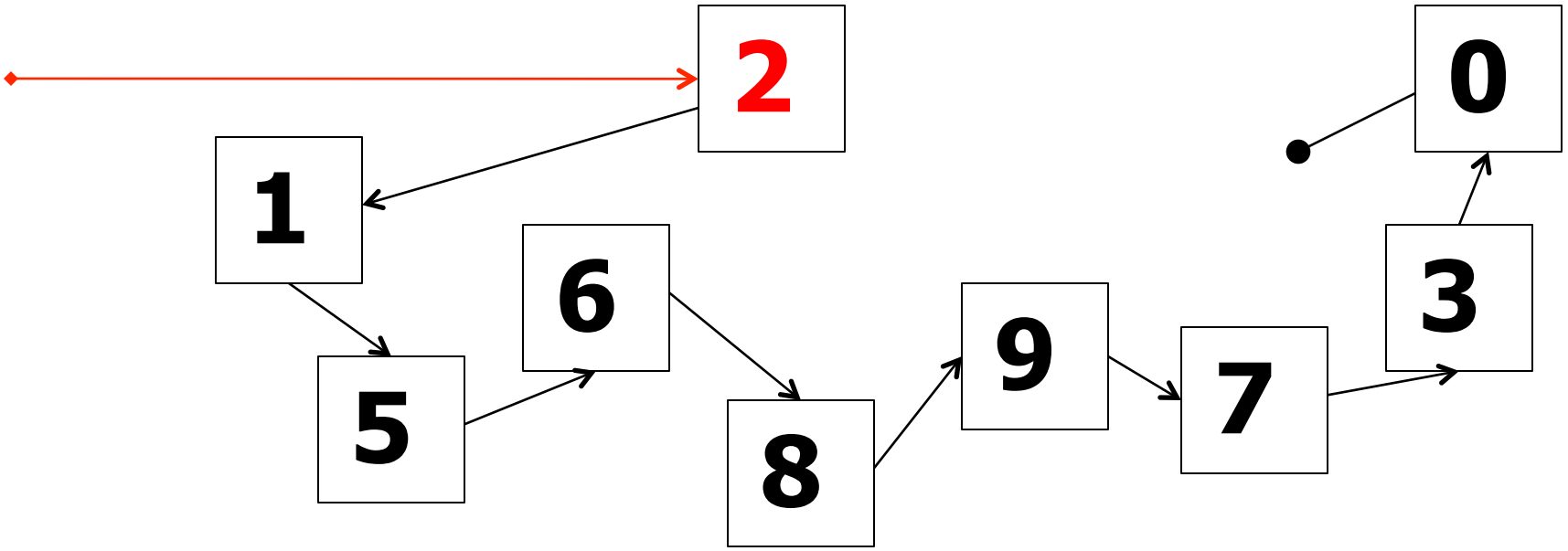
Mengen: Lösung mit Listen

- Menge wird als Liste gespeichert.
  - **Einfügen:** zum Beispiel vorne anfügen (effizient)



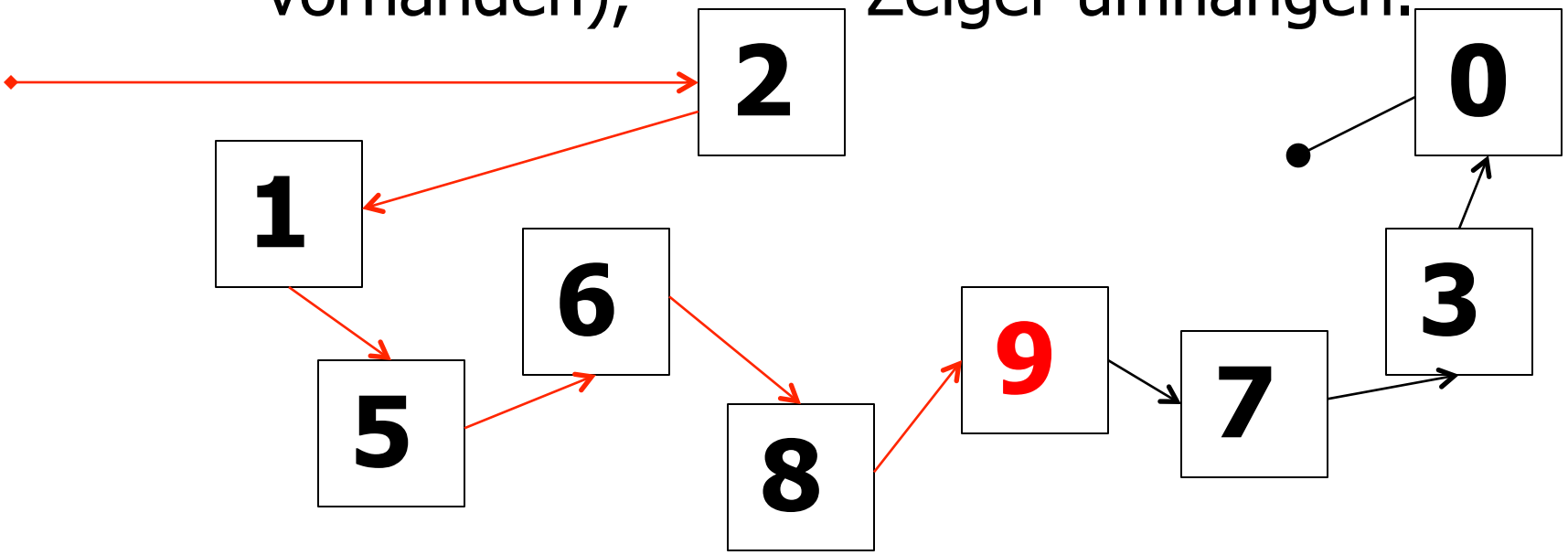
Mengen: Lösung mit Listen

- Menge wird als Liste gespeichert.
  - **Einfügen:** zum Beispiel vorne anfügen (effizient)



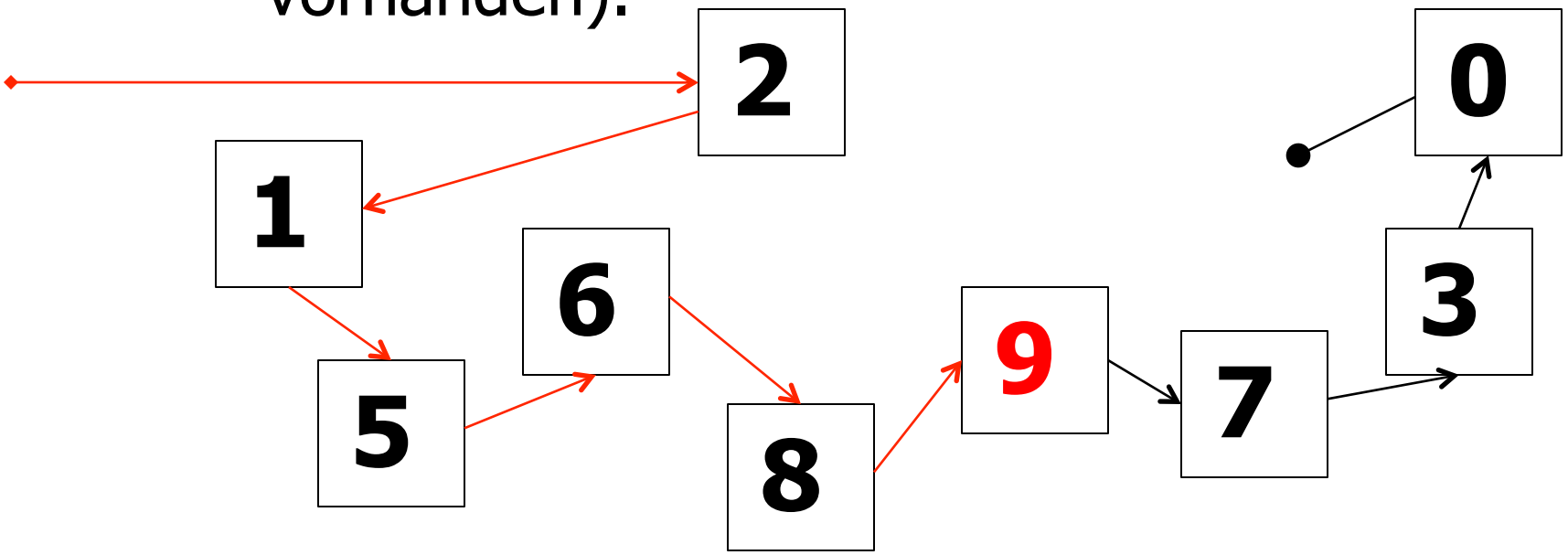
Mengen: Lösung mit Listen

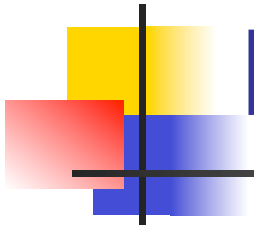
- Menge wird als Liste gespeichert.
  - **Löschen:** Durchlaufen der Liste bis zum Element (oder bis zum Ende, falls nicht vorhanden), Zeiger umhängen.



Mengen: Lösung mit Listen

- Menge wird als Liste gespeichert.
  - **Suchen:** Durchlaufen der Liste bis zum Element (oder bis zum Ende, falls nicht vorhanden).



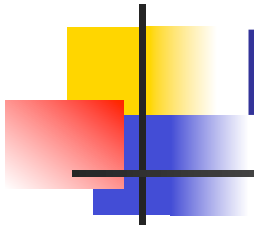


Mengen: Lösung mit Listen

- Falls die Menge *n* Elemente enthält, so ist der Aufwand fürs Suchen eines Elements im schlimmsten Fall proportional zu *n.*

Mengen: Lösung mit Listen

- Falls die Menge *n* Elemente enthält, so ist der Aufwand fürs Suchen eines Elements im schlimmsten Fall proportional zu *n.*
- Facebook: Zeit zum Einloggen wäre proportional zur Anzahl der Nutzer.



Mengen: Lösung mit Listen

- Beispiel: Suche nach den letzten 100 Elementen in einer Liste von 10,000,000 Elementen

Mengen: Lösung mit Listen

- Beispiel: Suche nach den letzten 100 Elementen in einer Liste von 10,000,000 Elementen

```
List l;
for (int i=0; i<10000000; ++i)
    l.push_front(i);

// ...and search for the 100 first ones
for (int i=0; i<100; ++i)
  l.find(i);
```

Mengen: Lösung mit Listen

- Beispiel: Suche nach den letzten 100 Elementen in einer Liste von 10,000,000 Elementen

```
List l;
for (int i=0; i<10000000; ++i)
    l.push_front(i);

// ...and search for the 100 first ones
for (int i=0; i<100; ++i)
  l.find(i);
```

6.5 Sekunden

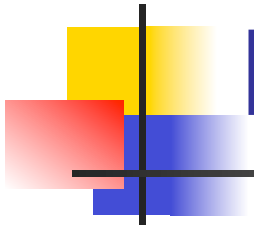
Mengen: Lösung mit Listen

- Beispiel: Suche nach den letzten 100 Elementen in einer Liste von 10,000,000 Elementen

```
List l;
for (int i=0; i<10000000; ++i)
    l.push_front(i);

// ...and search for the 100 first ones
for (int i=0; i<100; ++i)
  l.find(i);
```

Facebook hat 1,000,000,000 Nutzer, *eine* Suche würde 6.5 Sekunden dauern!

6.5 Sekunden

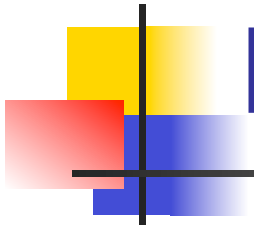


Mengen: Lösung mit Listen

- Beispiel: Suche nach den letzten 100 Elementen in einer Liste von 10,000,000 Elementen
- Finden eines Elements:

```
const Node* List::find (int key)
{
  for (const Node* p = head_; p != 0; p = p>get_next())
    if (p->get_key() == key) return p;
  return 0;
}
```

Mengen: Lösung mit Binären Suchbäumen.



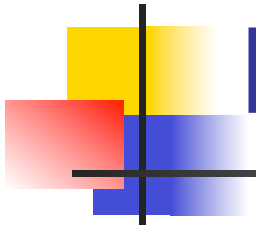
- Falls die Menge n Elemente enthält, so ist der Aufwand fürs Suchen eines Elements im schlimmsten Fall proportional zu $\log_2 n$.
- Facebook: Zeit zum Einloggen ist proportional zum Logarithmus der Anzahl der Nutzer.

Mengen: Lösung mit Binären Suchbäumen.

- Falls die Menge *n* Elemente enthält, so ist der Aufwand fürs Suchen eines Elements im schlimmsten Fall proportional zu $\log_2 n$.
- Facebook: Zeit zum Einloggen ist proportional zum Logarithmus der Anzahl der Nutzer.

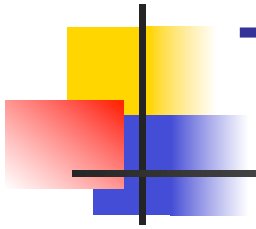
$log_2(1{,}000{,}000{,}000) \approx 30$.

Mengen: Lösung mit Binären Suchbäumen.



- Falls die Menge n Elemente enthält, so ist der Aufwand fürs Suchen eines Elements im schlimmsten Fall proportional zu $\log_2 n$.
- Auch Einfügen und Löschen geht in Zeit proportional to $\log_2 n$.

Binärbäume, Definition und Terminologie



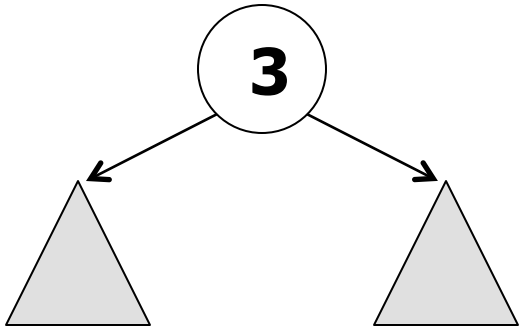
- Ein binärer Baum ist entweder leer,...

Binärbäume, Definition und Terminologie

- Ein binärer Baum ist entweder leer,...
- oder er besteht aus einem **Knoten** (Kreis)
  - mit einem **Schlüssel** (hier: ganze Zahl),...

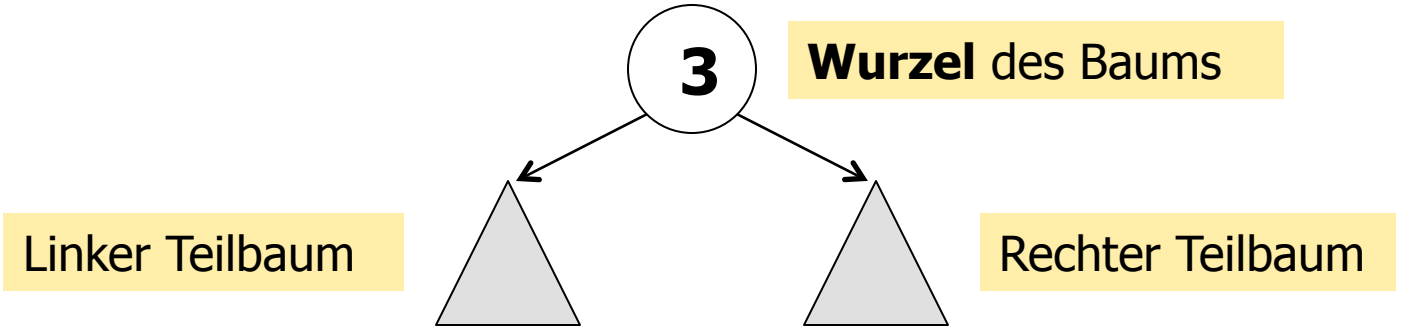
Binärbäume, Definition und Terminologie

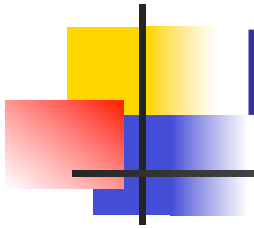
- Ein binärer Baum ist entweder leer,...
- oder er besteht aus einem **Knoten** (Kreis)
  - mit einem **Schlüssel** (hier: ganze Zahl),...
  - und einem **linken** und **rechten Teilbaum**, die jeweils Binärbäume sind.



Binärbäume, Definition und Terminologie

- Ein binärer Baum ist entweder leer,...
- oder er besteht aus einem **Knoten** (Kreis)
  - mit einem **Schlüssel** (hier: ganze Zahl),...
  - und einem **linken** und **rechten Teilbaum**, die jeweils Binärbäume sind.

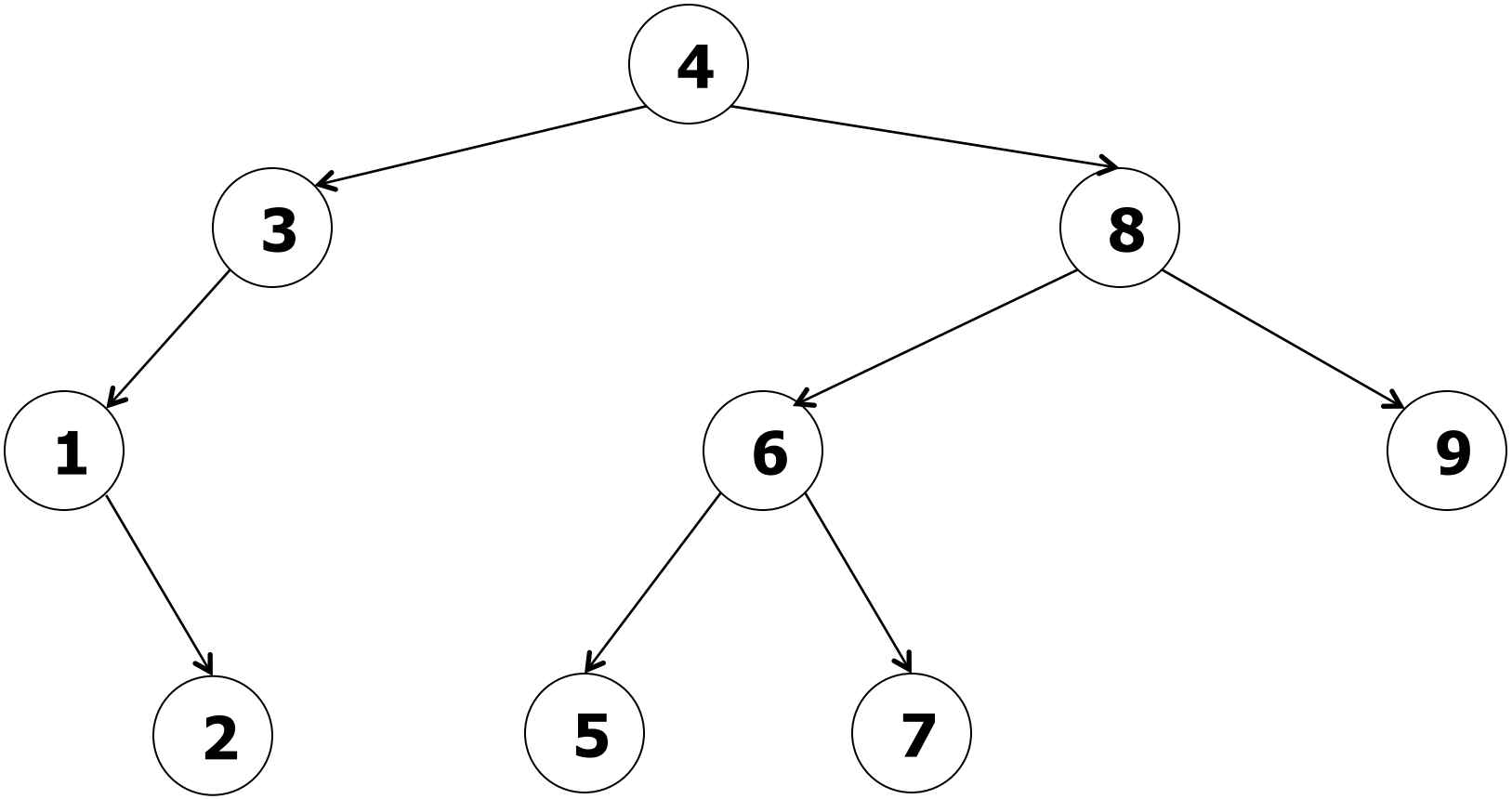




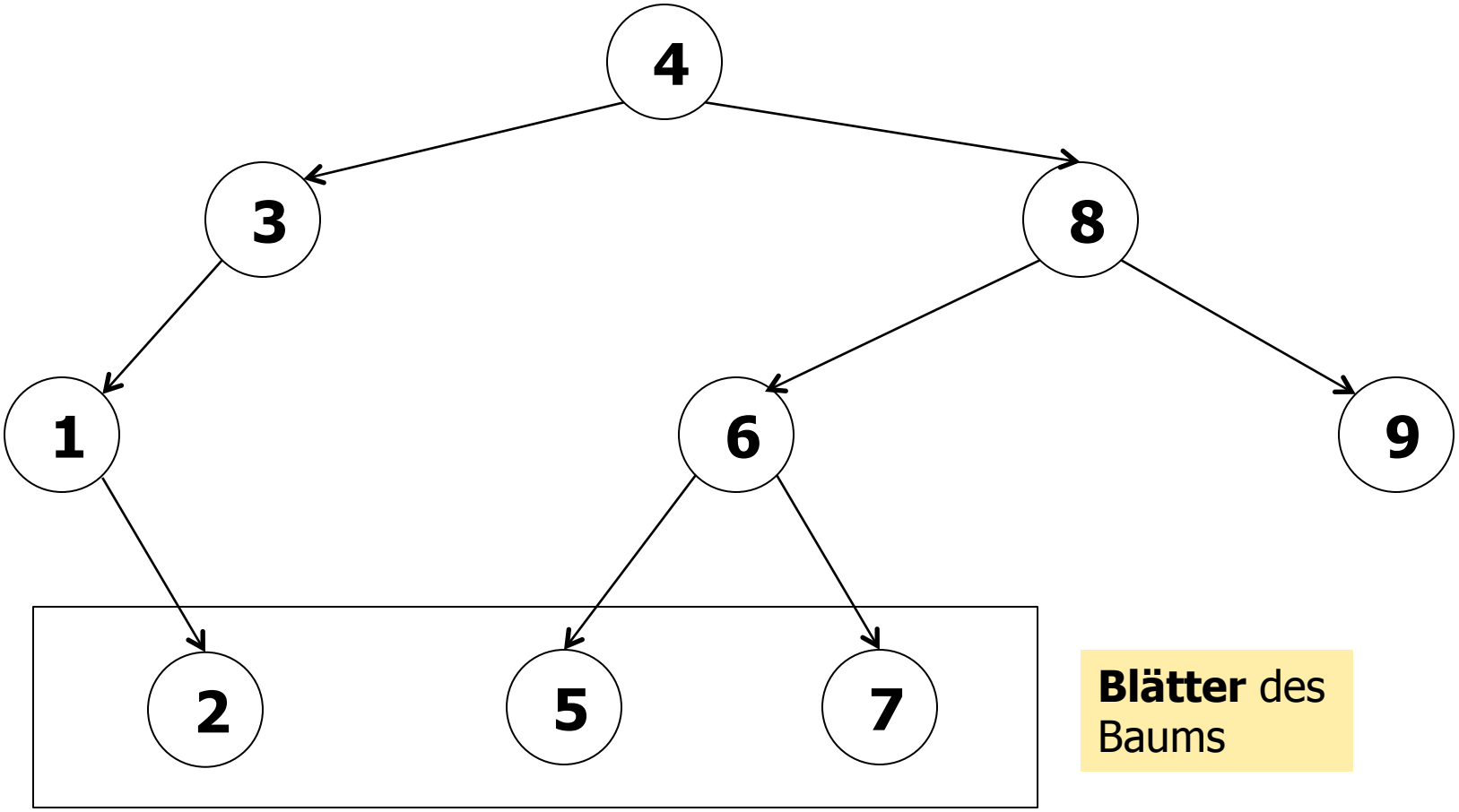
Binäre Suchbäume

- Ein Binärbaum heisst **binärer Suchbaum**, wenn er leer ist, oder wenn folgende Bedingungen gelten:
  - Sowohl der linke als auch der rechte Teilbaum sind binäre Suchbäume.
  - Der Schlüssel der Wurzel ist
    - > alle Schlüssel im linken Teilbaum, und
    - $\leqq$ alle Schlüssel im rechten Teilbaum.

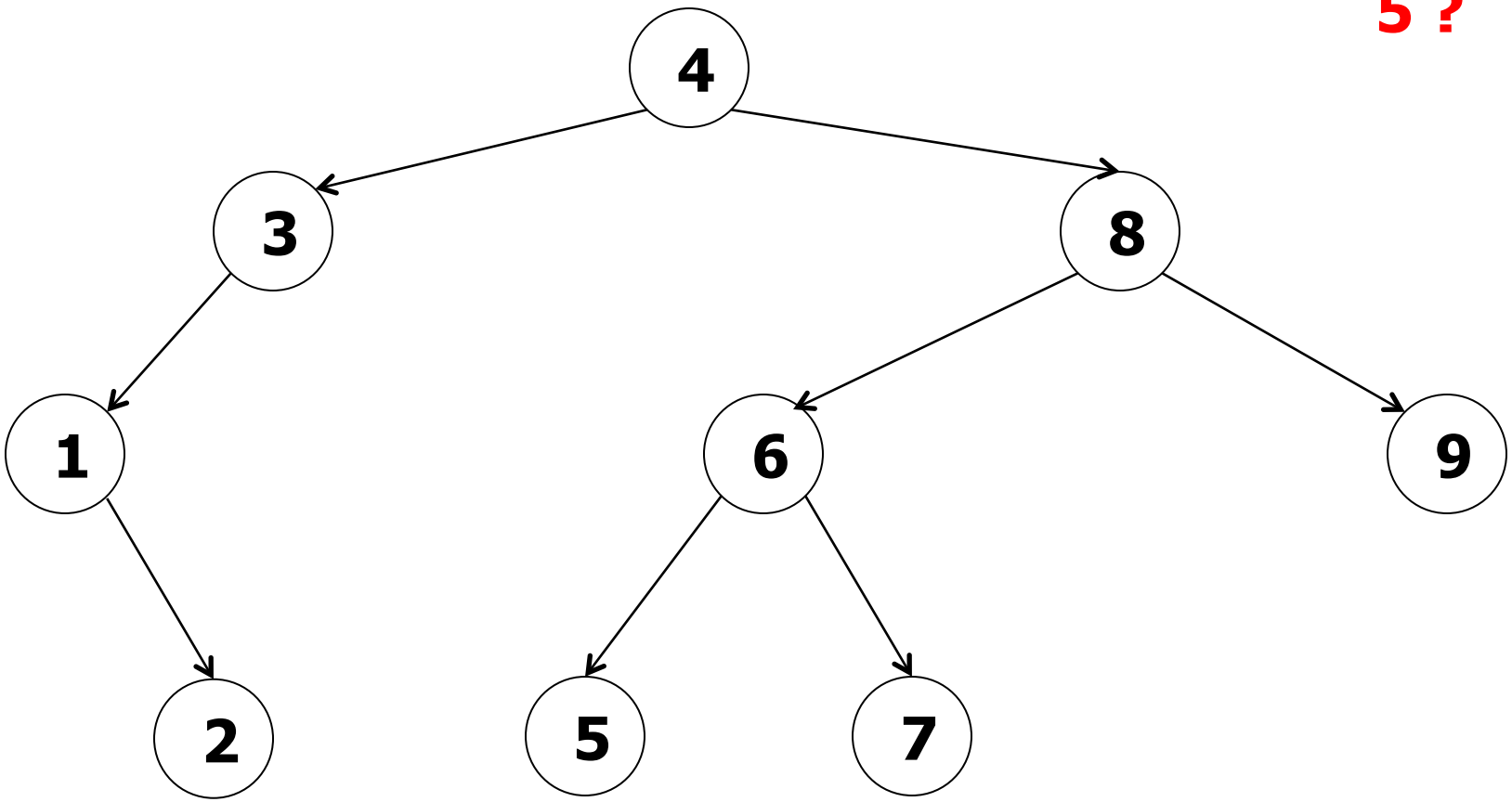
Binäre Suchbäume: Beispiel



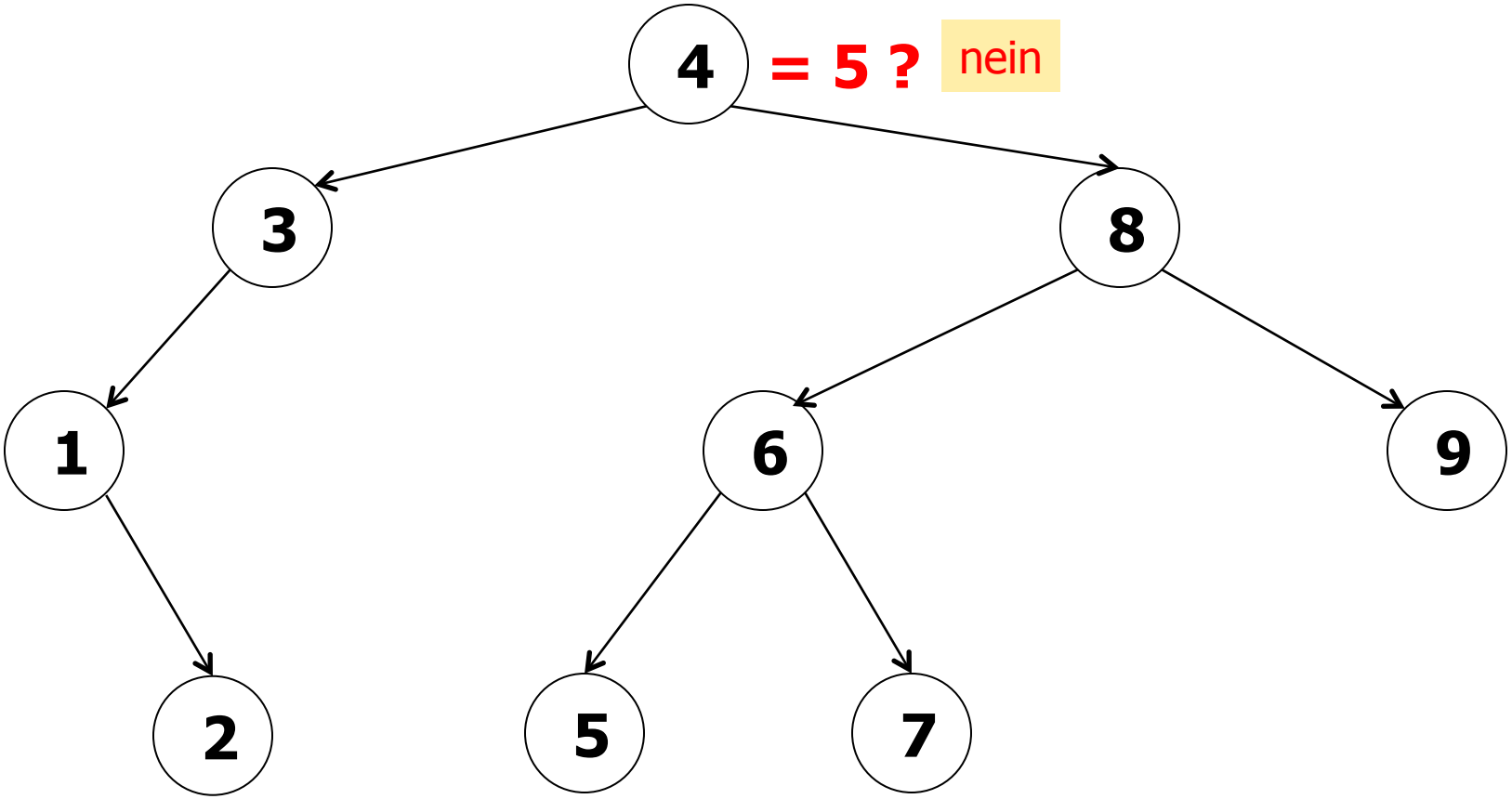
Binäre Suchbäume: Beispiel



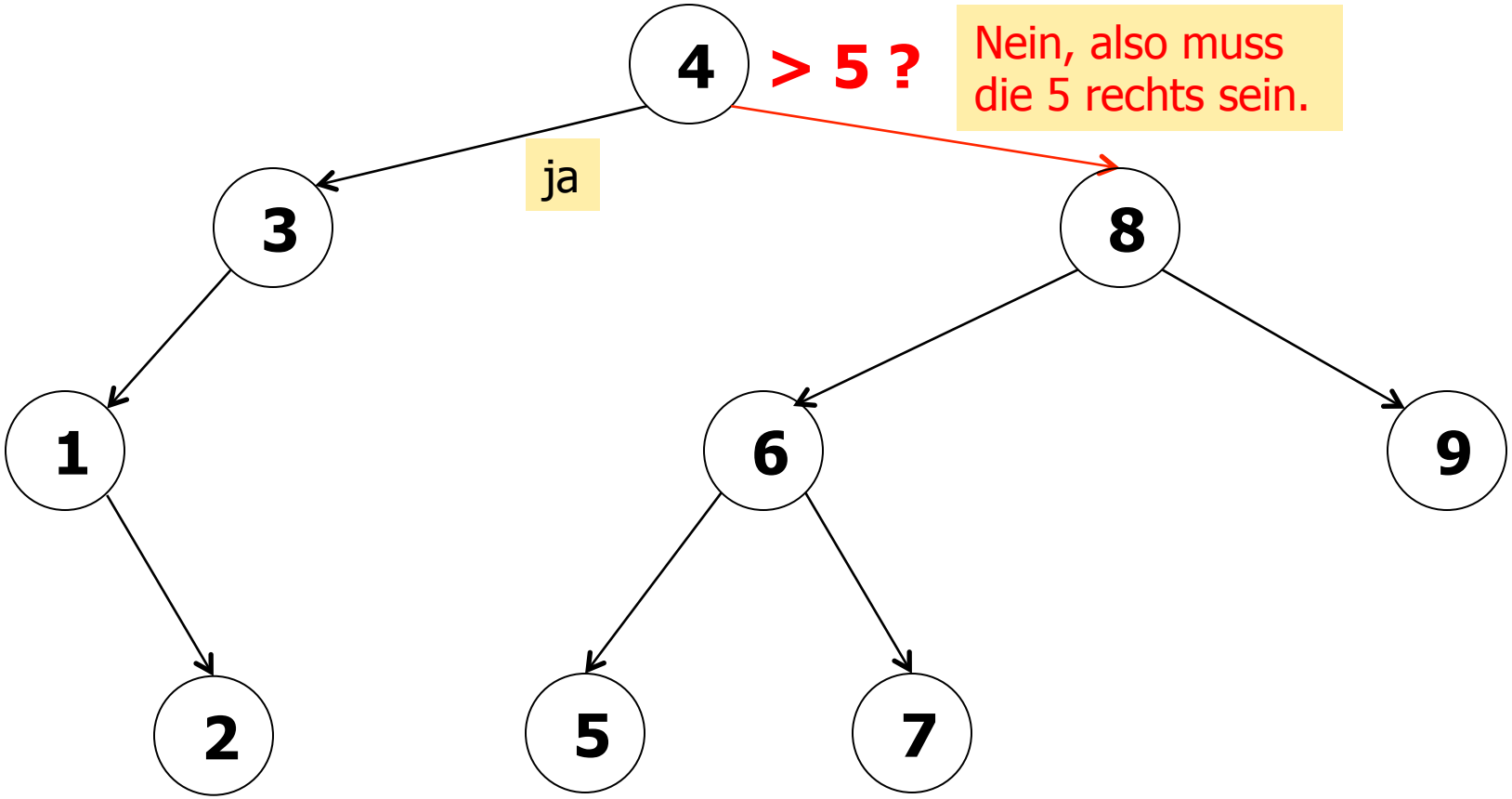
Binäre **Such**bäume: Suchen nach einem Schlüssel



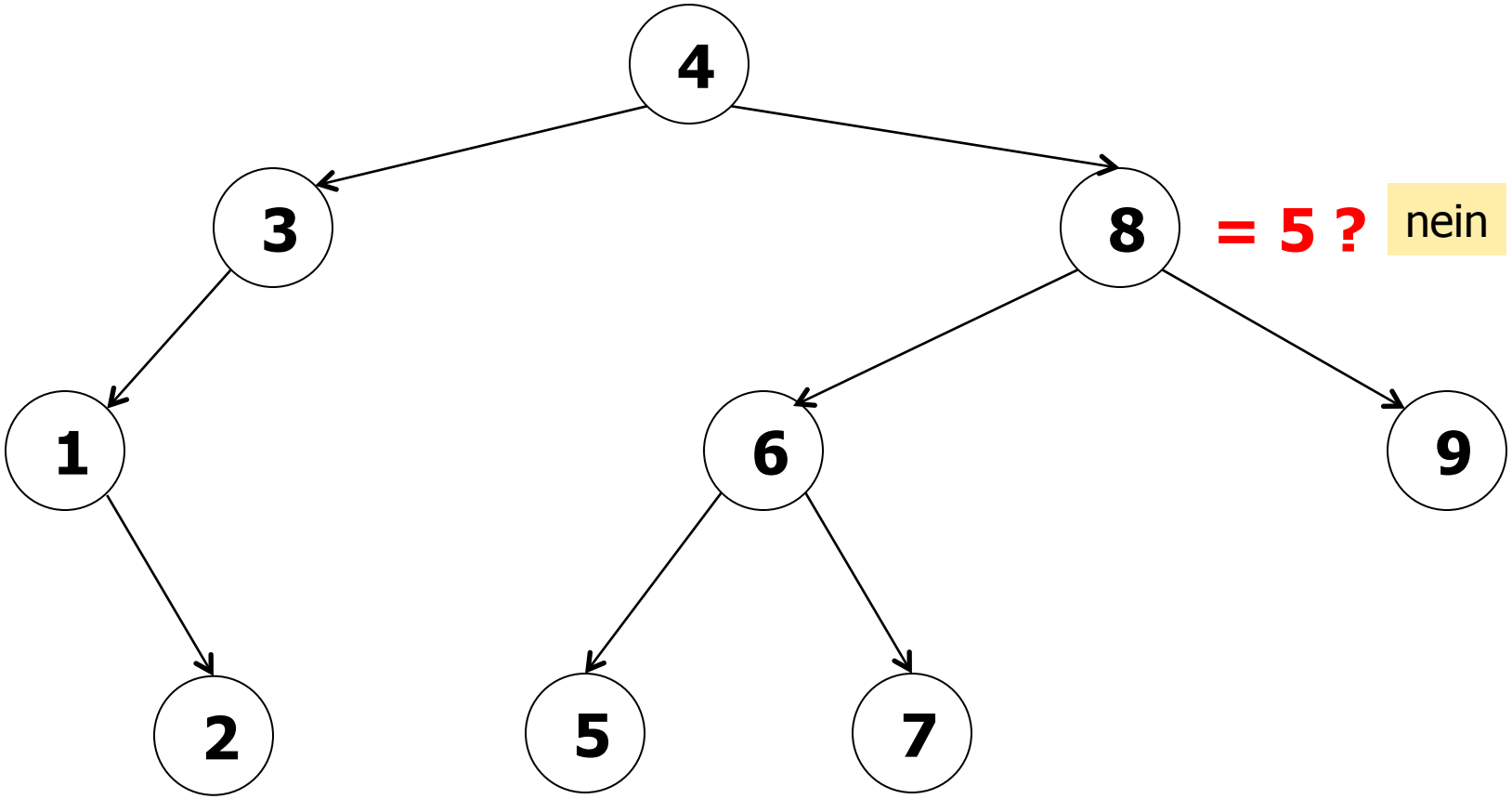
Binäre **Such**bäume: Suchen nach einem Schlüssel



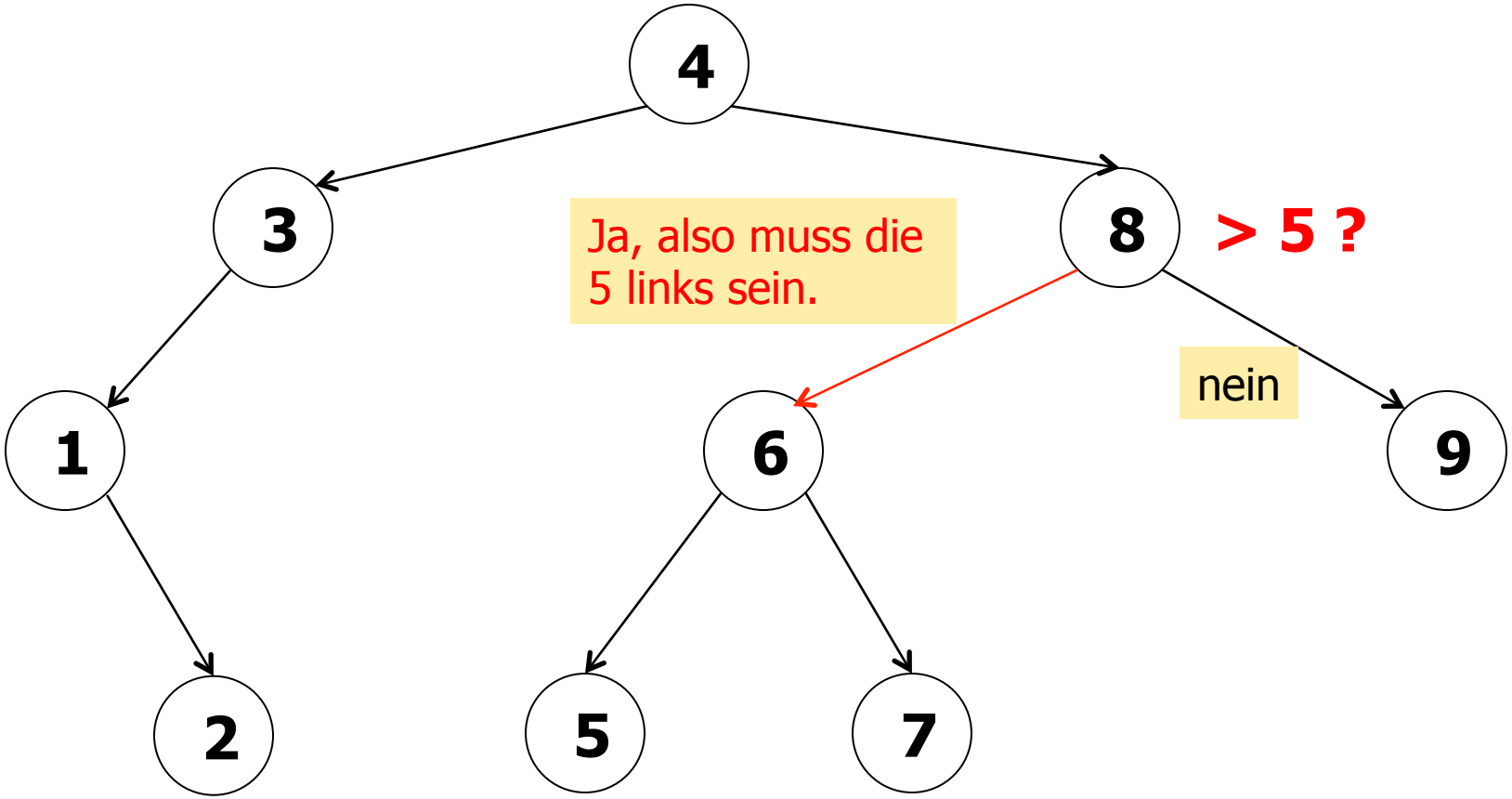
Binäre **Such**bäume: Suchen nach einem Schlüssel



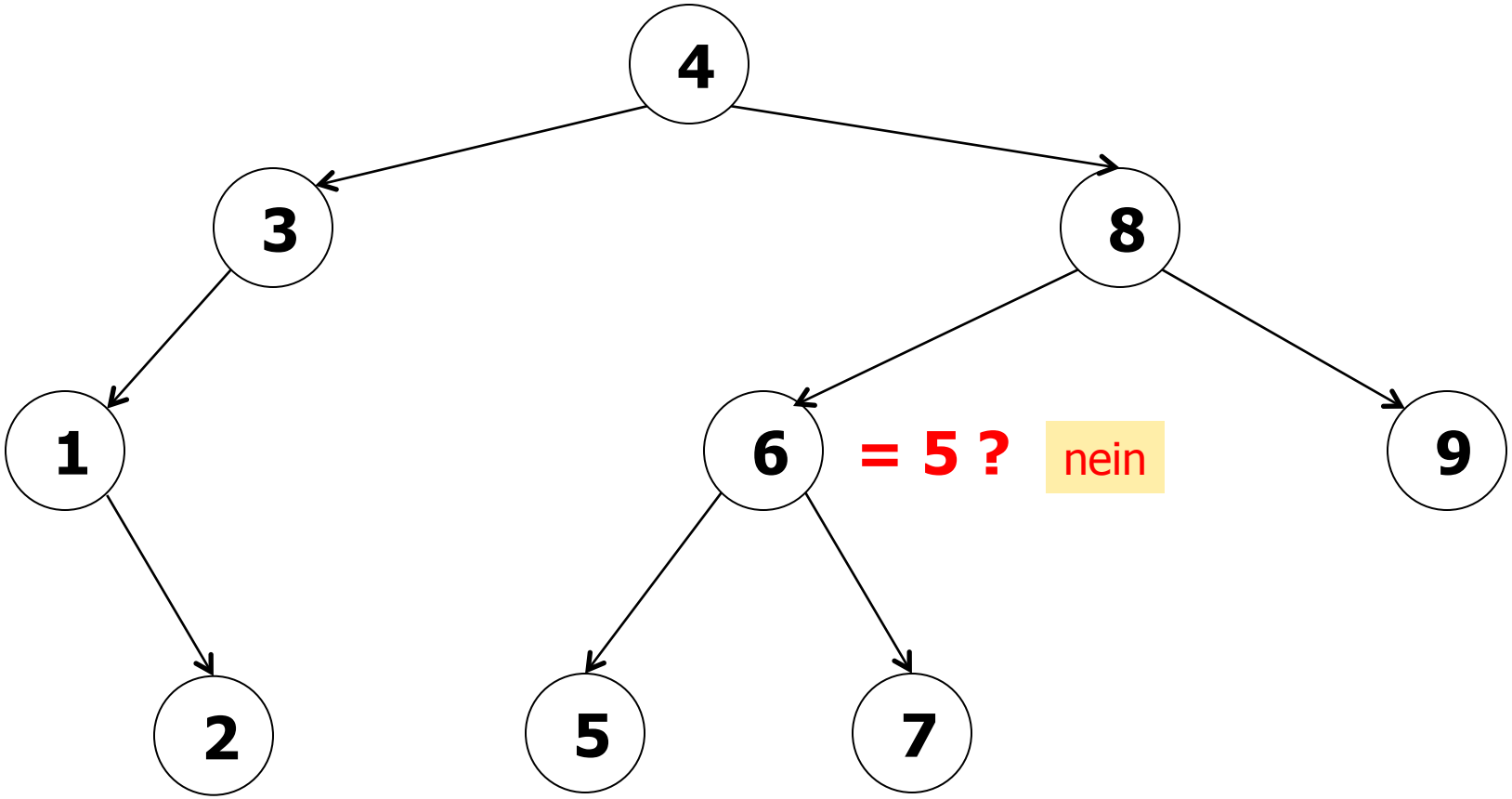
Binäre **Such**bäume: Suchen nach einem Schlüssel



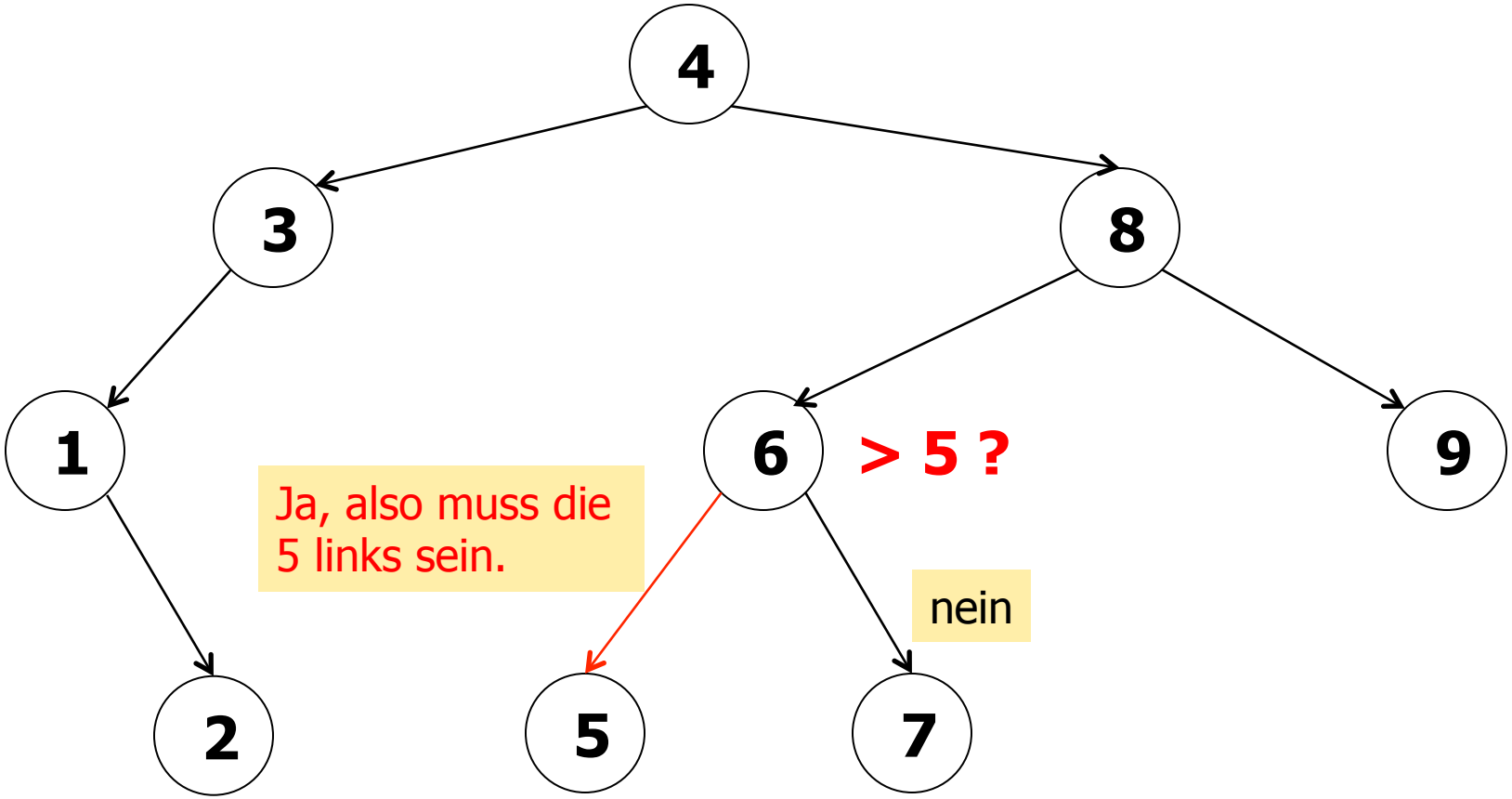
Binäre **Such**bäume: Suchen nach einem Schlüssel



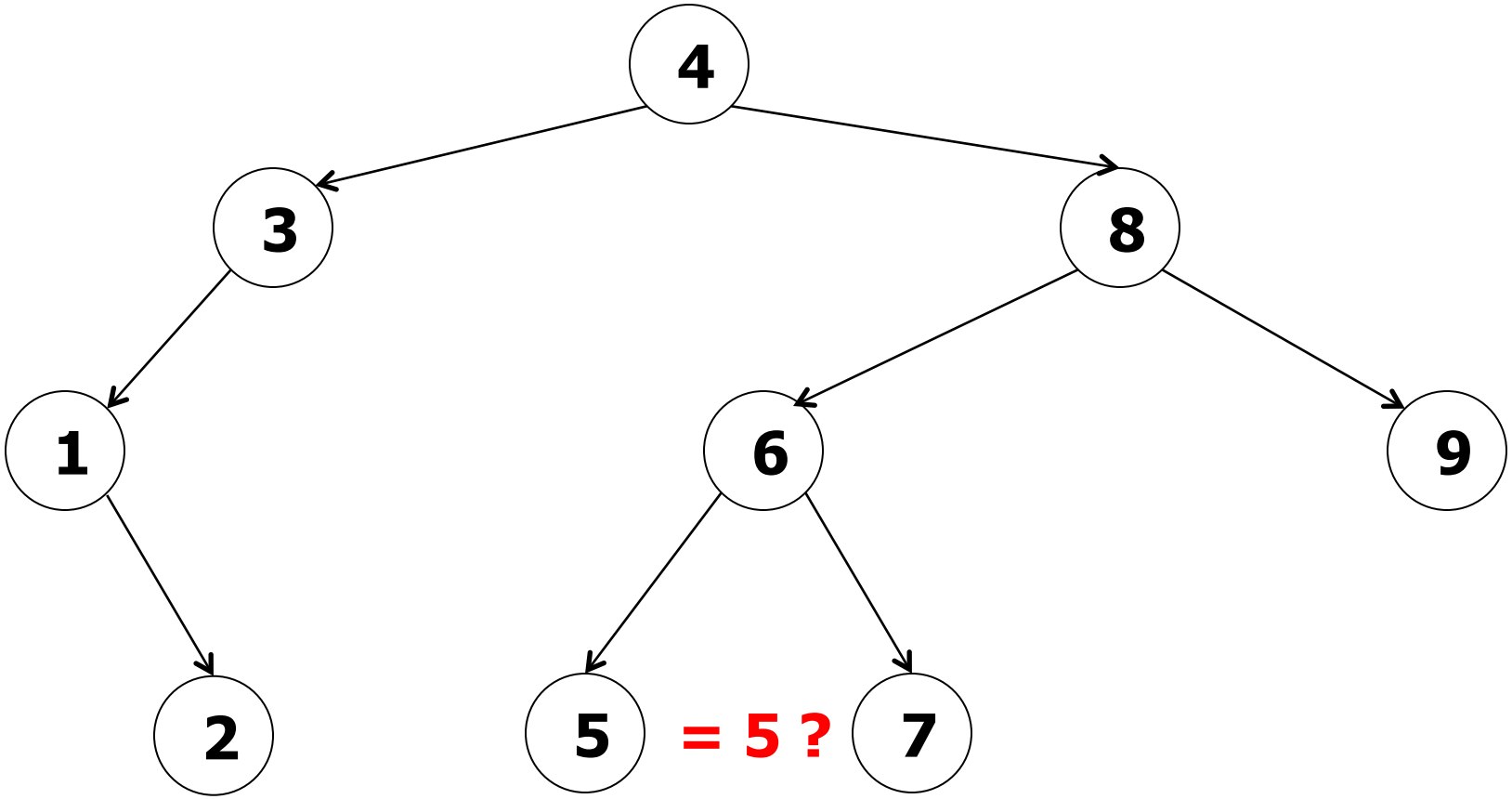
Binäre **Such**bäume: Suchen nach einem Schlüssel



Binäre **Such**bäume: Suchen nach einem Schlüssel

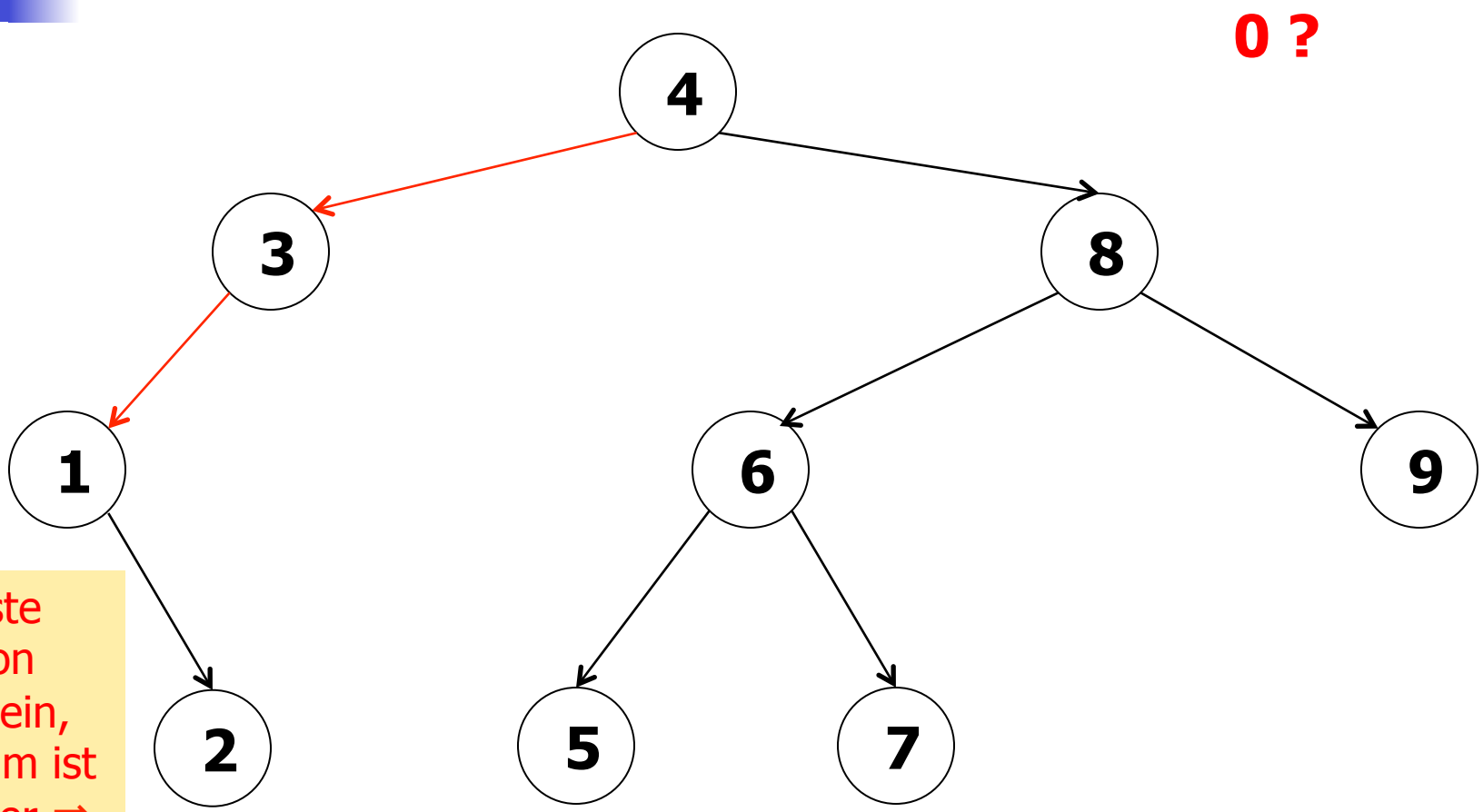


Binäre **Such**bäume: Suchen nach einem Schlüssel



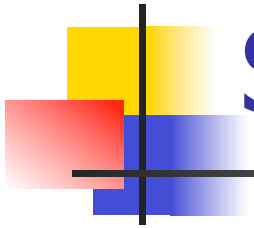
Ja, Schlüssel gefunden!

Binäre **Such**bäume: Suchen nach einem Schlüssel



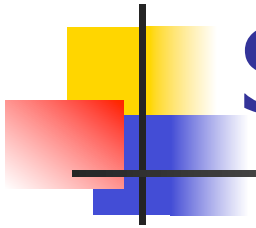
0 müsste links von der 1 sein, Teilbaum ist aber leer ⇒ 0 nicht da.

Mengen: Lösung mit binären Suchbäumen



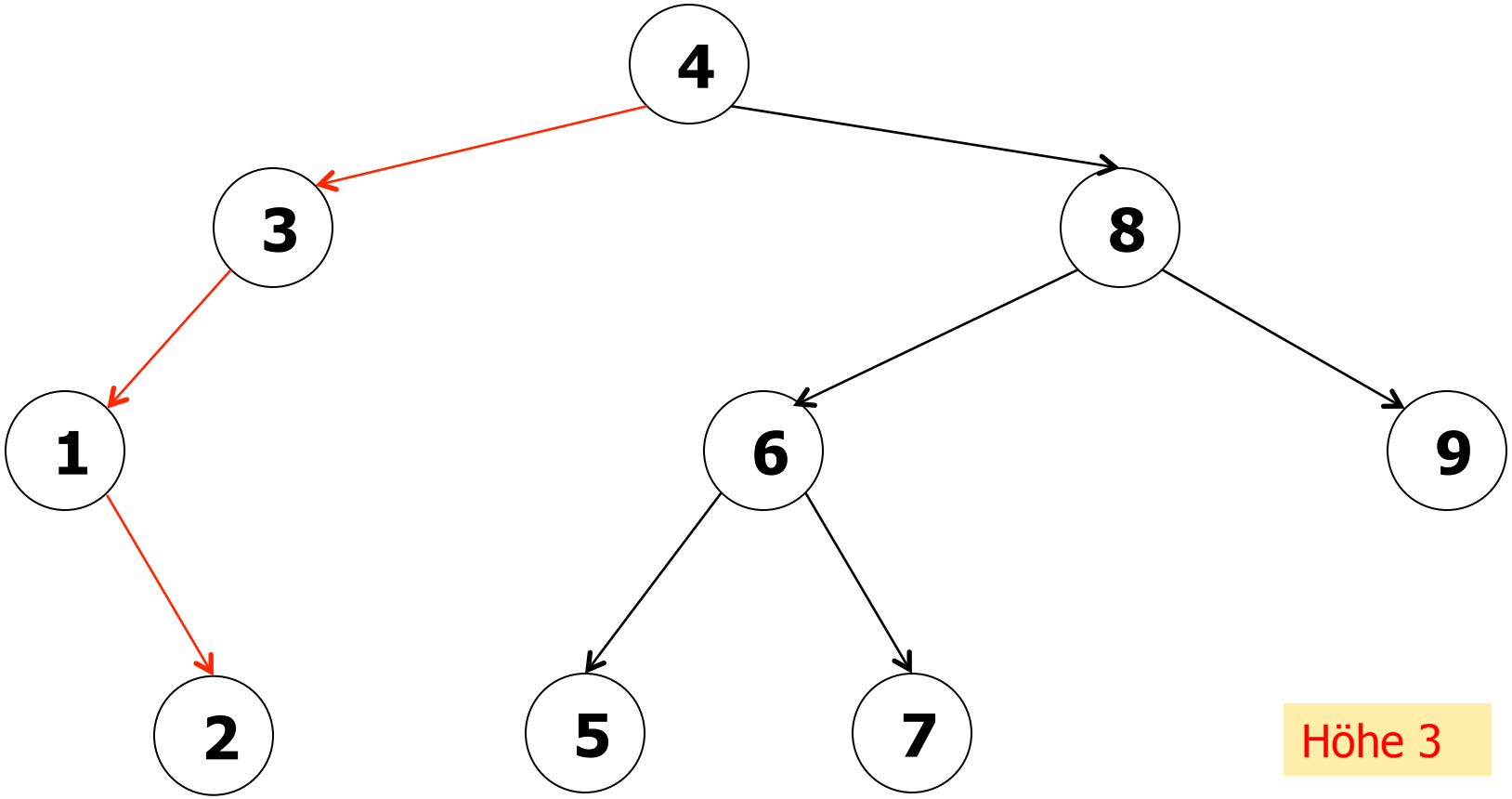
- Speichere die Elemente der Menge als Schlüssel in einem binären Suchbaum!

Mengen: Lösung mit binären Suchbäumen

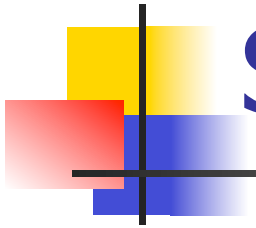


- Speichere die Elemente der Menge als Schlüssel in einem binären Suchbaum!
- Suchzeit ist proportional zur **Höhe** des Baums (Länge des längsten Pfades von der Wurzel bis zu einem Blatt).

Mengen: Lösung mit binären Suchbäumen

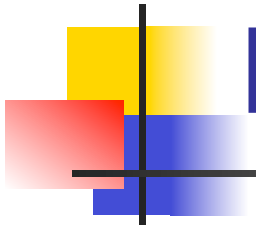


Mengen: Lösung mit binären Suchbäumen



- Speichere die Elemente der Menge als Schlüssel in einem binären Suchbaum!
- Suchzeit ist proportional zur **Höhe** des Baums (Länge des längsten Pfades von der Wurzel bis zu einem Blatt).
- Einfügen und Löschen von Elementen?

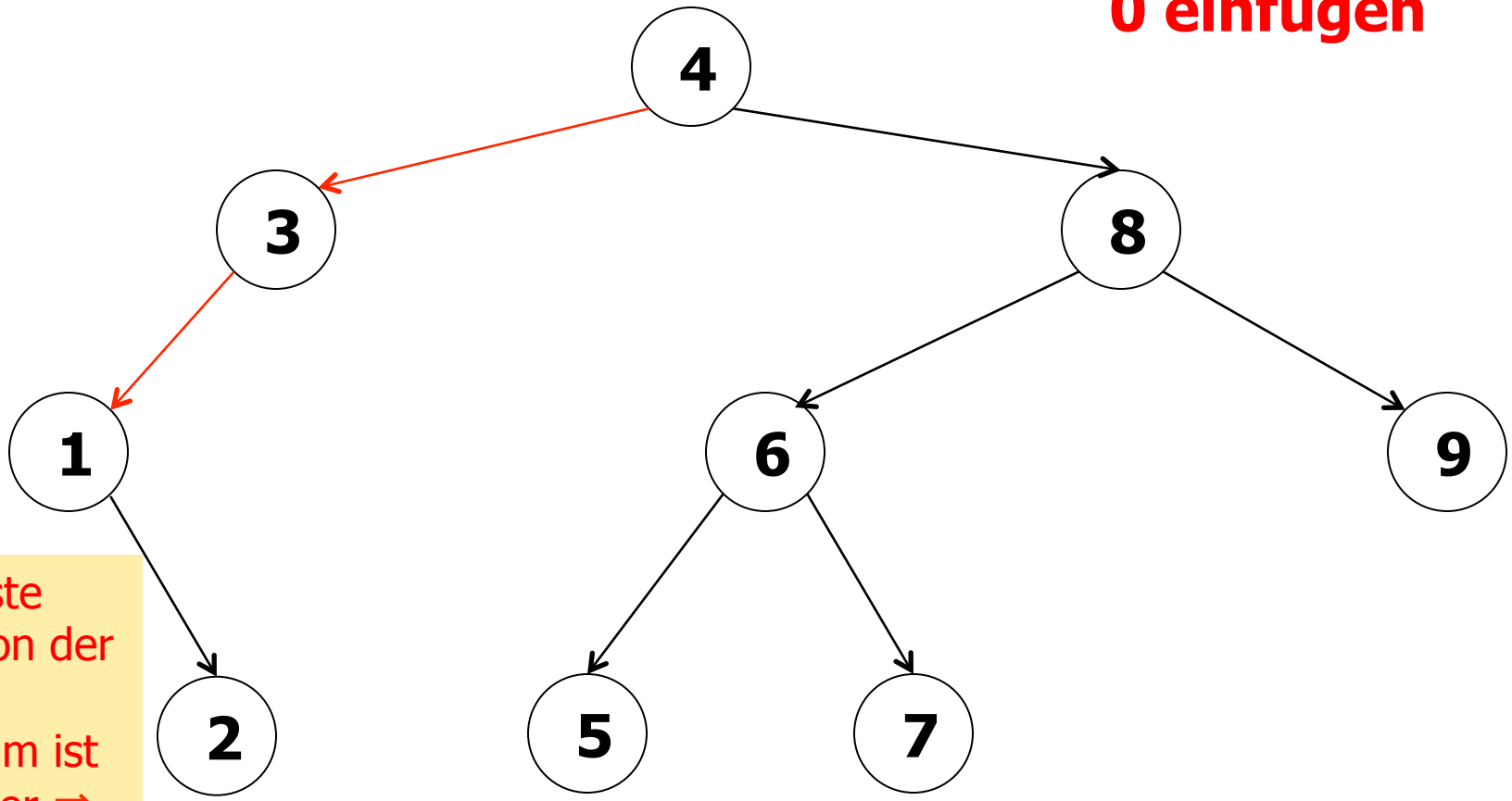
Binäre Suchbäume: Einfügen



- Neues Element suchen und als Blatt an der passenden Stelle anhängen!

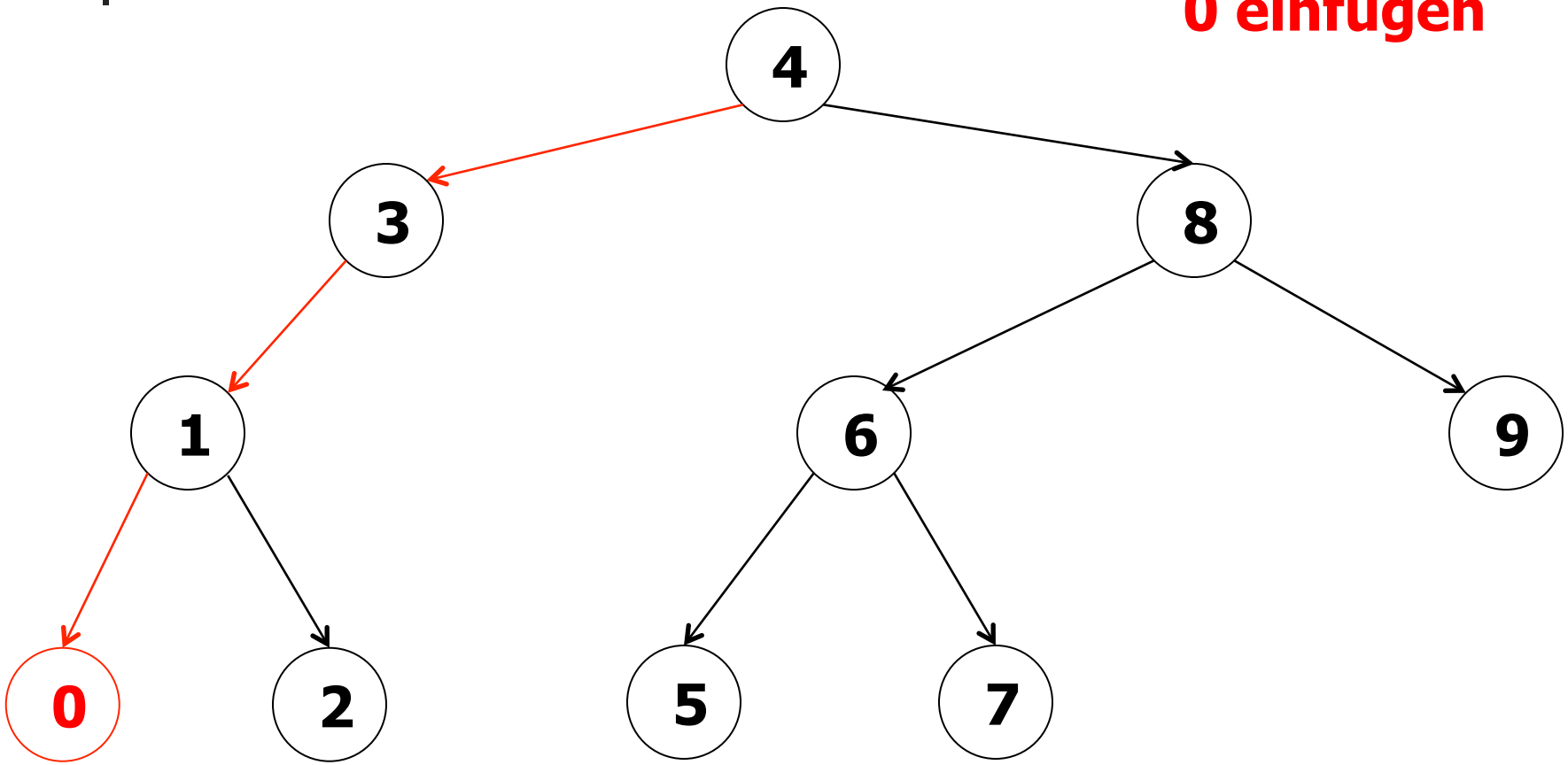
Binäre Suchbäume: Einfügen

0 einfügen

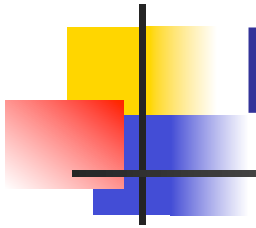


0 müsste links von der 1 sein, Teilbaum ist aber leer ⇒ **neues Blatt**

Binäre Suchbäume: Einfügen

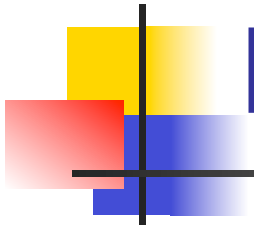


Binäre Suchbäume: Einfügen



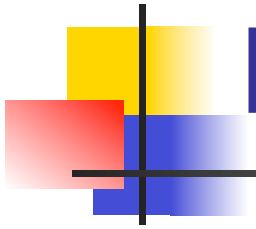
- Neues Element suchen und als Blatt an der passenden Stelle anhängen!
- Auch die Einfügezeit ist proportional zur Höhe des Baums.

Binäre Suchbäume: Löschen



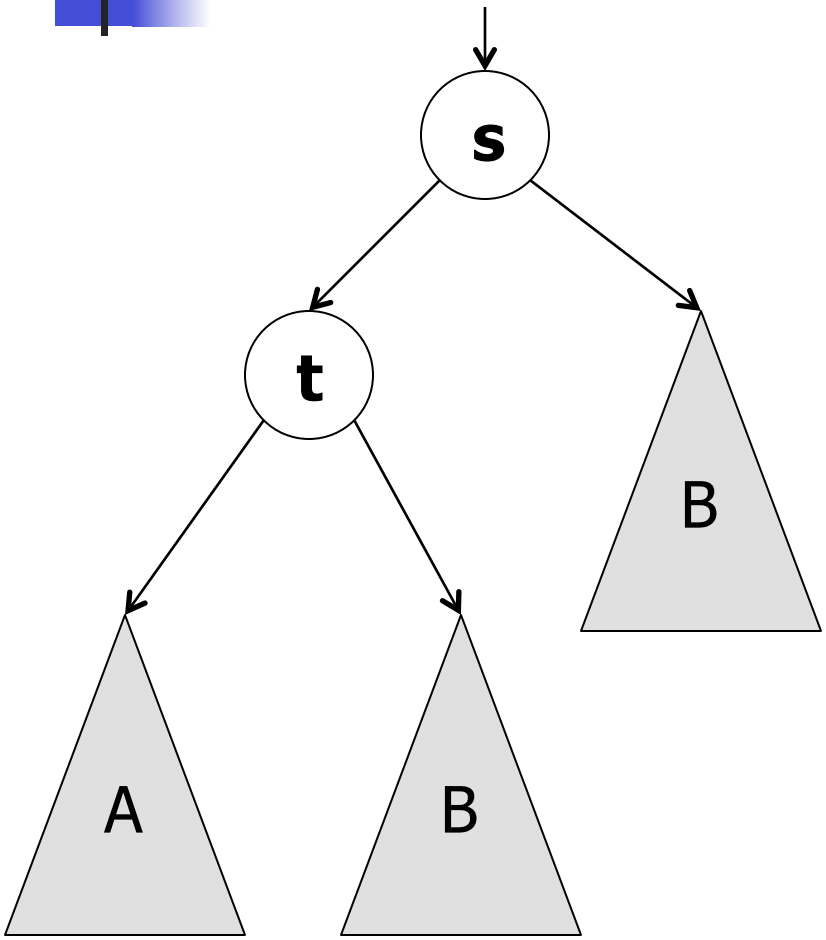
- Element suchen, seinen Knoten durch **Rotationen** zu einem Blatt machen, Blatt löschen!

Binäre Suchbäume: Löschen

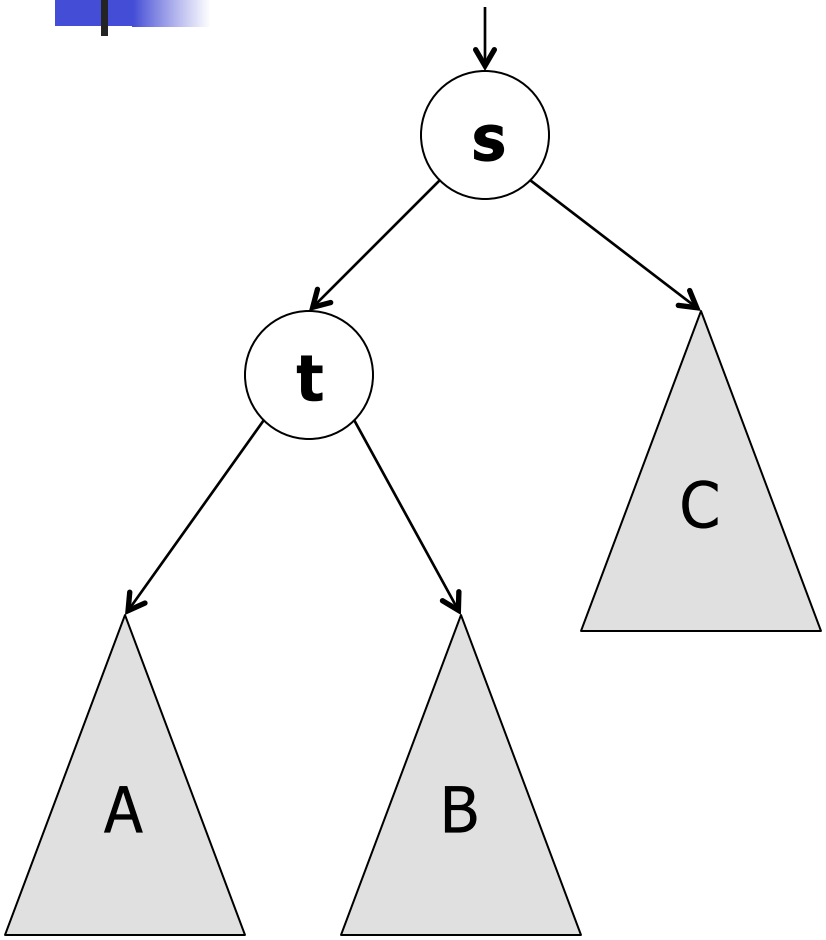


- Element suchen, seinen Knoten durch **Rotationen** zu einem Blatt machen, Blatt löschen!
- Rotation: lokale Operation, welche die Positionen von Knoten verändert, **nicht** jedoch die Suchbaumeigenschaften.

Rotation eines Teilbaums

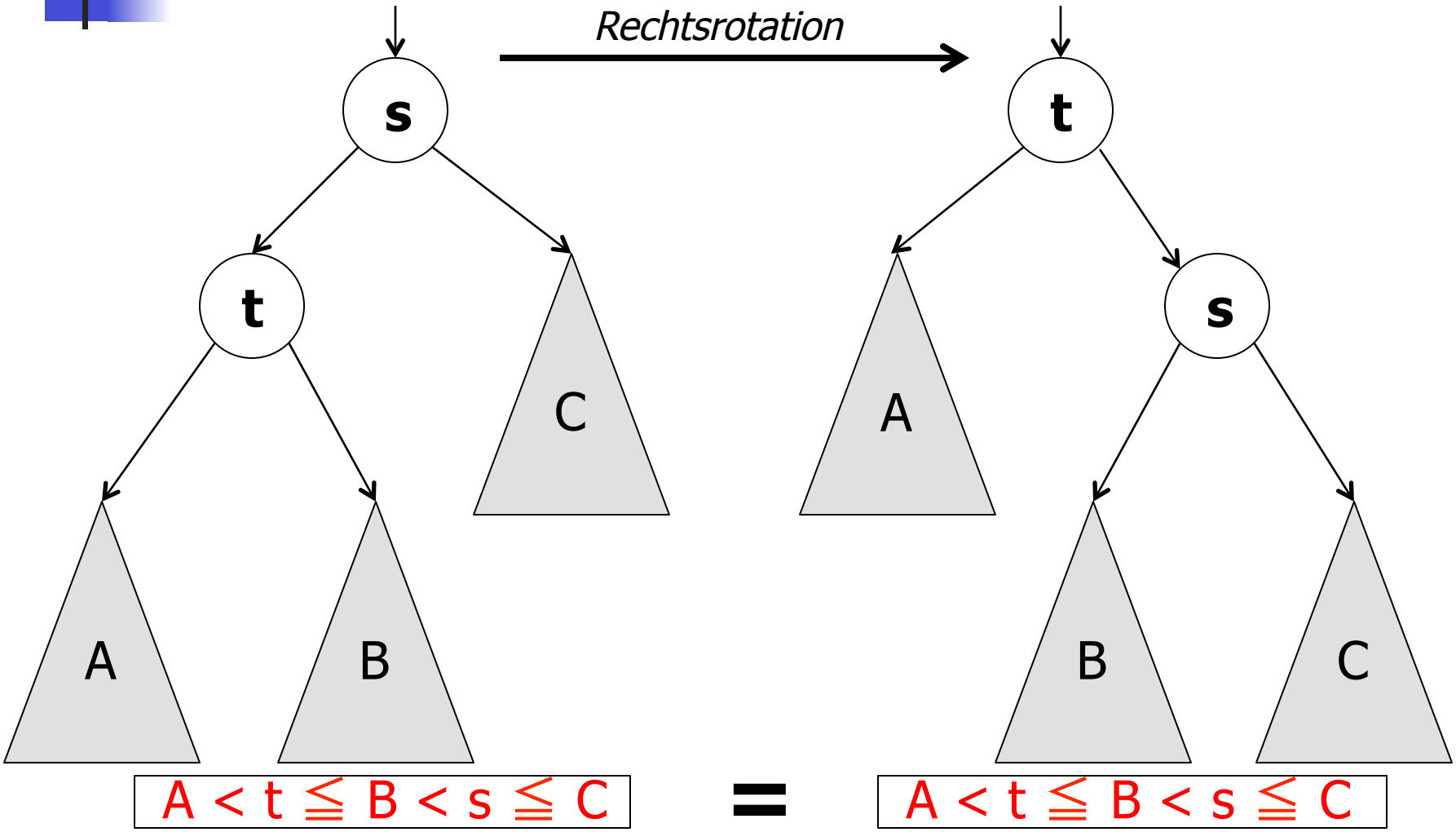


Rotation eines Teilbaums

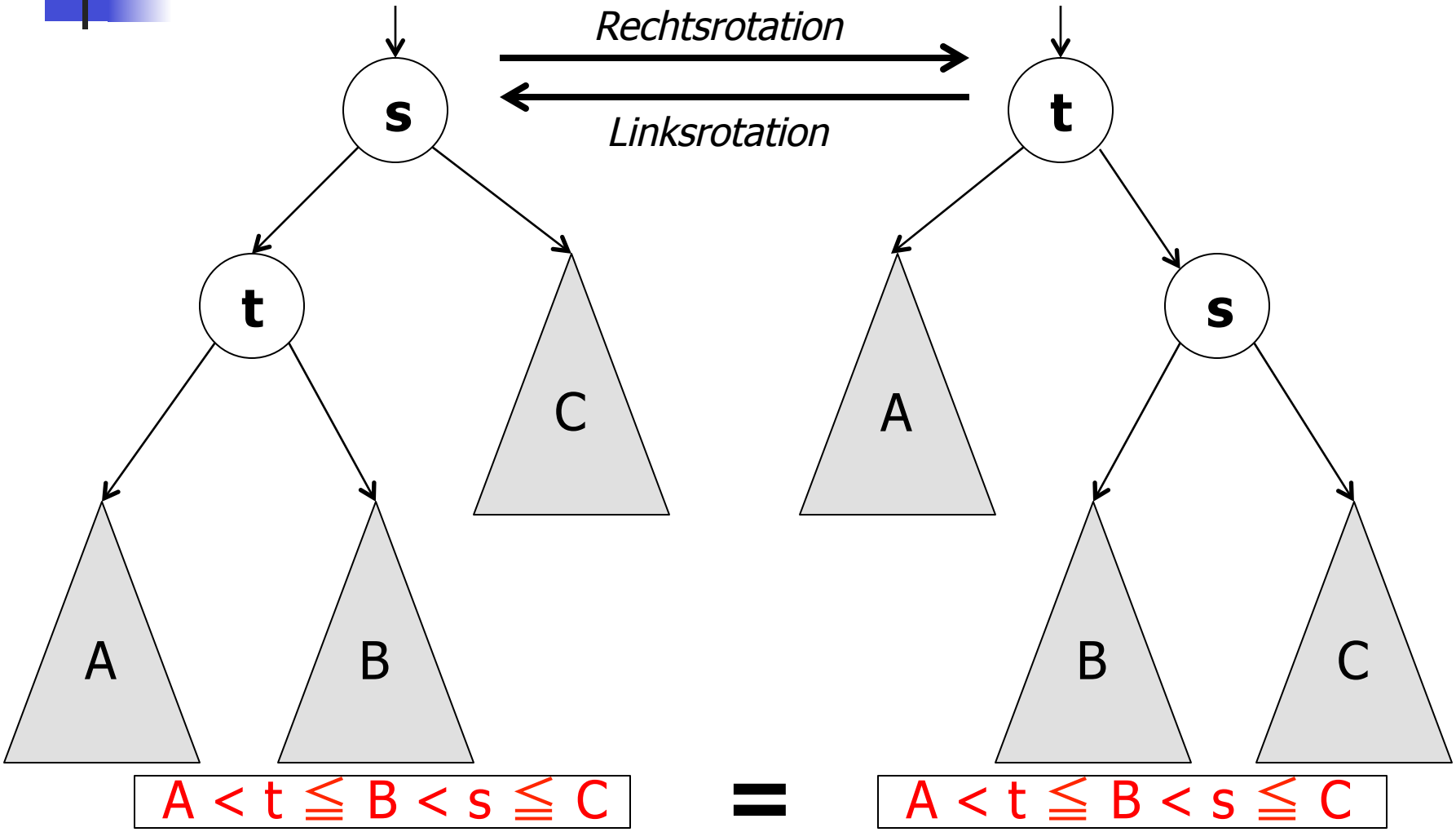


$A < t \leqq B < s \leqq C$

Rotation eines Teilbaums

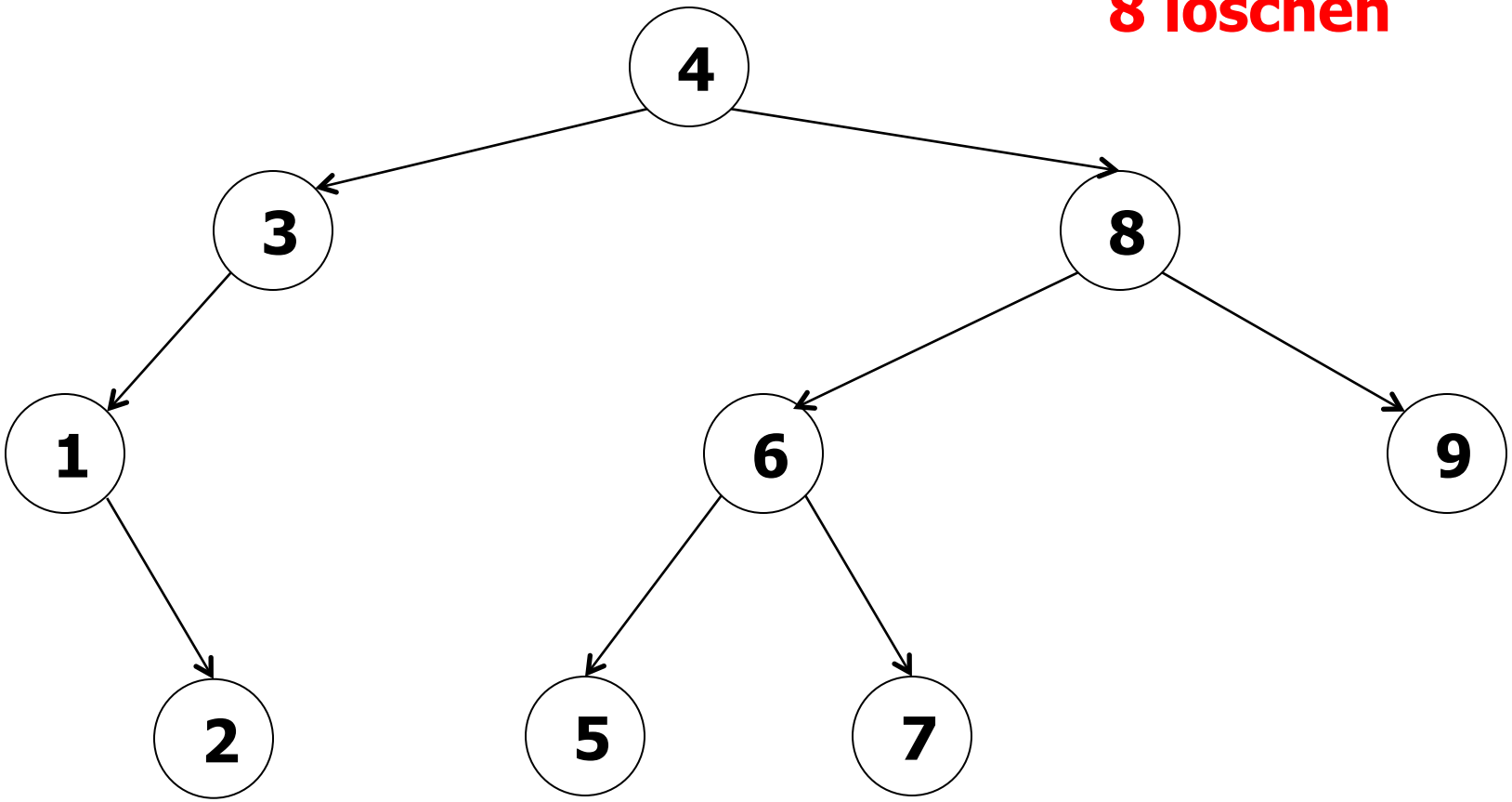


Rotation eines Teilbaums

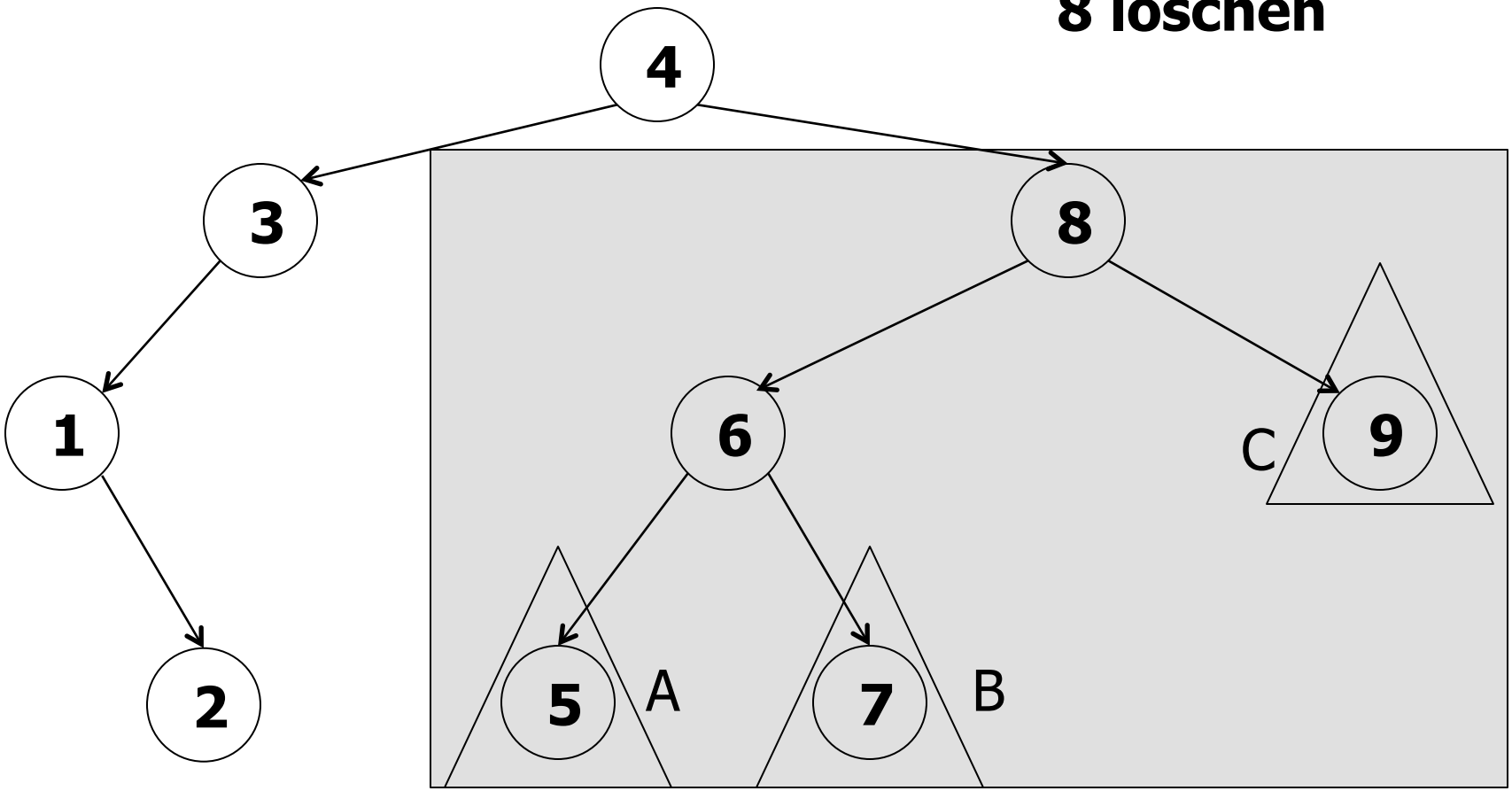


Binäre Suchbäume: Löschen

8 löschen

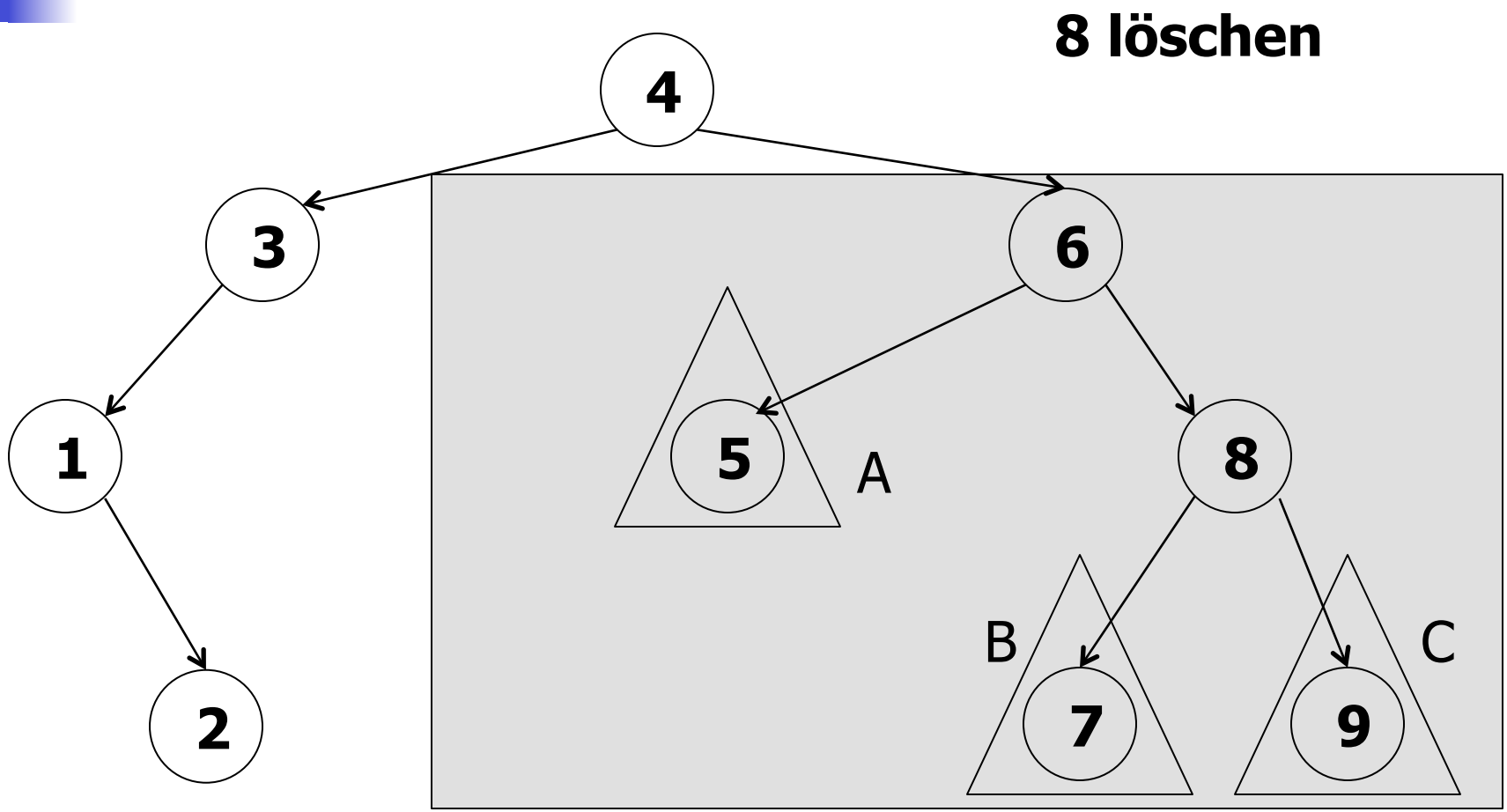


Binäre Suchbäume: Löschen



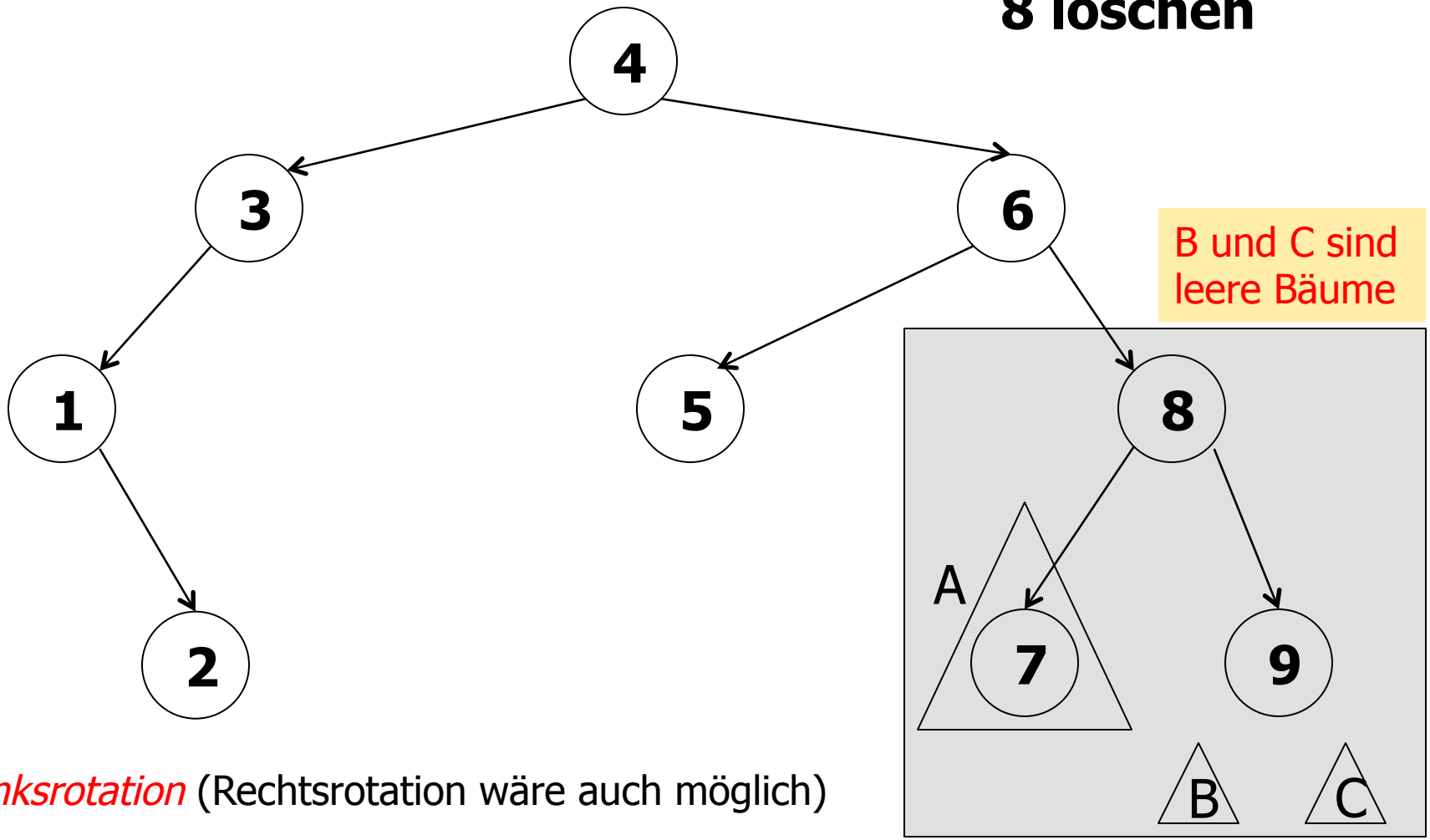
Rechtsrotation (Linksrotation wäre auch möglich)

Binäre Suchbäume: Löschen



Binäre Suchbäume: Löschen

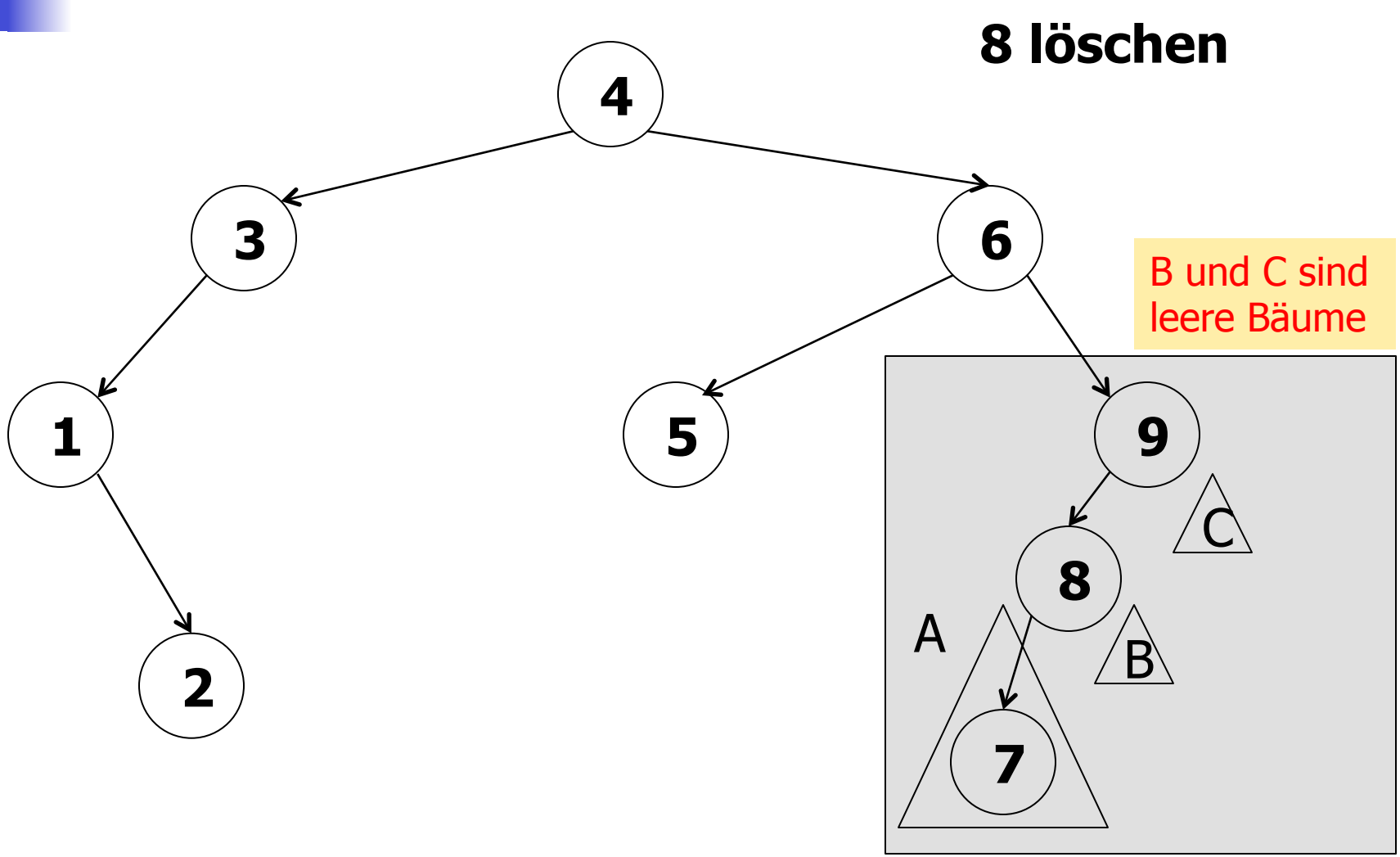
8 löschen



B und C sind leere Bäume

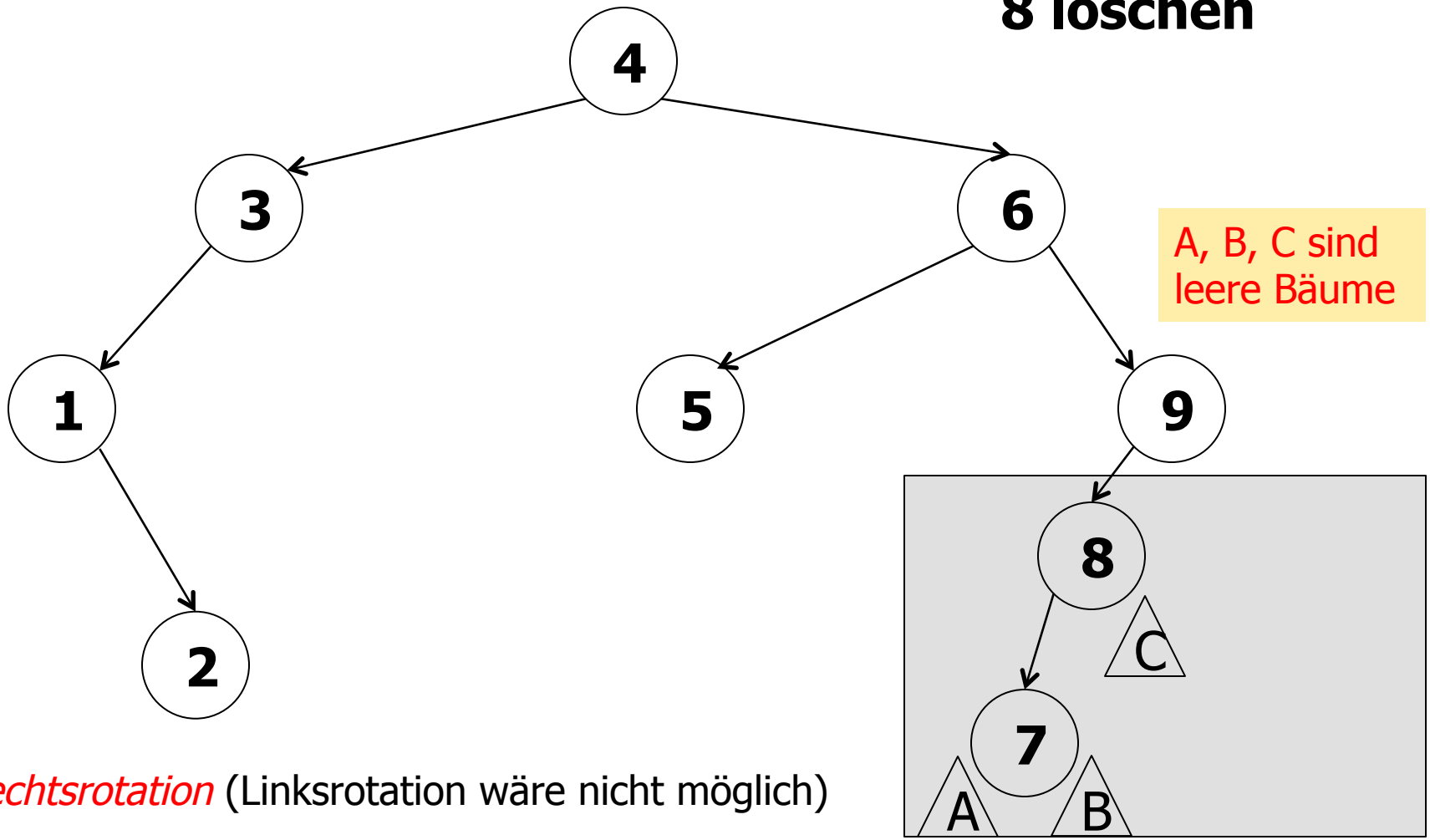
Linksrotation (Rechtsrotation wäre auch möglich)

Binäre Suchbäume: Löschen



Binäre Suchbäume: Löschen

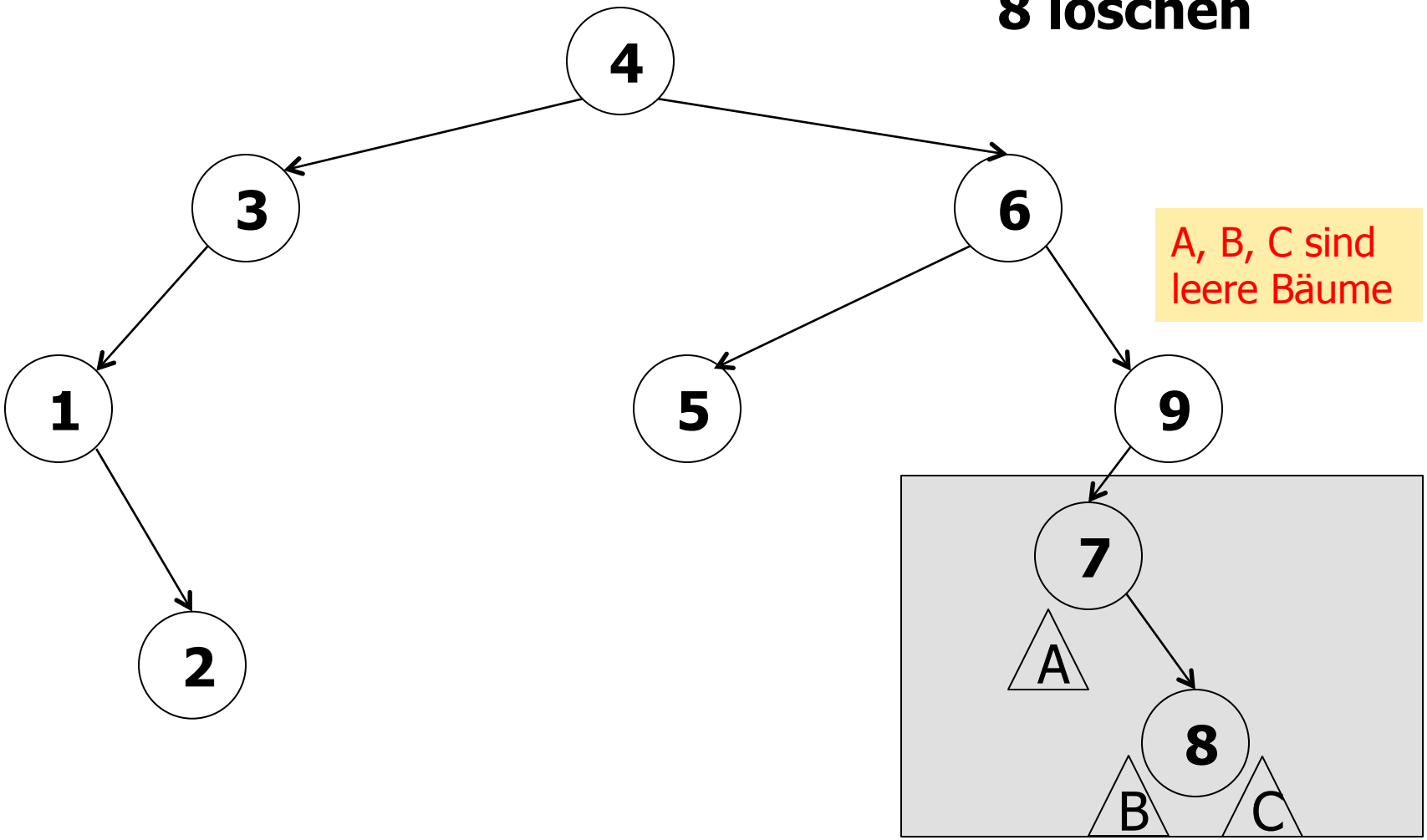
8 löschen



A, B, C sind leere Bäume

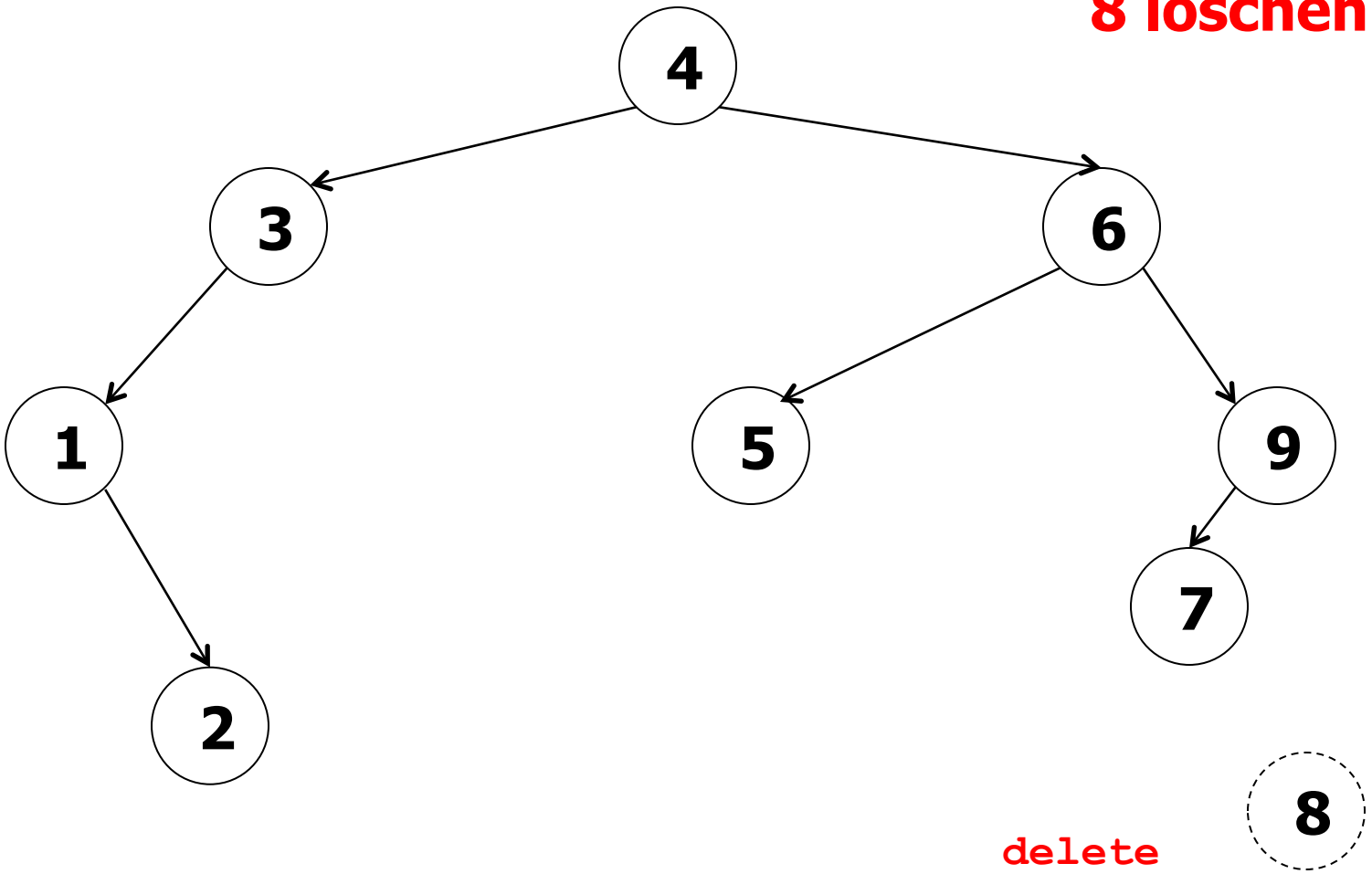
Rechtsrotation (Linksrotation wäre nicht möglich)

Binäre Suchbäume: Löschen

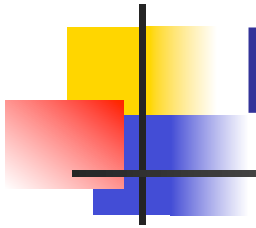


Binäre Suchbäume: Löschen

8 löschen

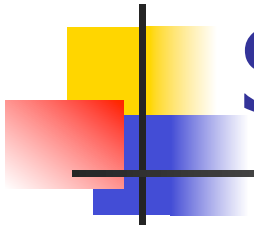


Binäre Suchbäume: Löschen



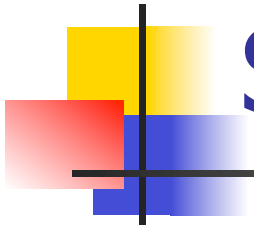
- Element suchen, seinen Knoten durch **Rotationen** zu einem Blatt machen, Blatt löschen!
- Rotation: lokale Operation, welche die Positionen von Knoten verändert, **nicht** jedoch die Suchbaumeigenschaften.
- Auch die Löschzeit ist proportional zur Höhe des Baums (nicht mehr ganz so offensichtlich)

Die Höhe eines binären Suchbaums...



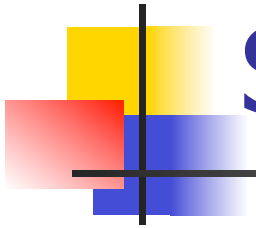
- bestimmt die Laufzeit des
  - Suchens,
  - Einfügens,
  - Löschens.

Die Höhe eines binären Suchbaums...



- bestimmt die Laufzeit des
  - Suchens,
  - Einfügens,
  - Löschens.
- kann aber bereits bei einer ungünstigen Einfügereihenfolge sehr gross werden!

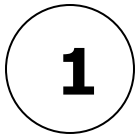
Die Höhe eines binären Suchbaums...



- bestimmt die Laufzeit des
  - Suchens,
  - Einfügens,
  - Löschens.
- kann aber bereits bei einer ungünstigen Einfügereihenfolge sehr gross werden!
- Laufzeit im schlimmsten Fall nicht besser als bei einer Liste!

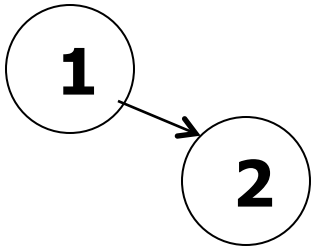
Die Höhe eines binären Suchbaums...

Beispiel: Einfügen in sortierter Reihenfolge



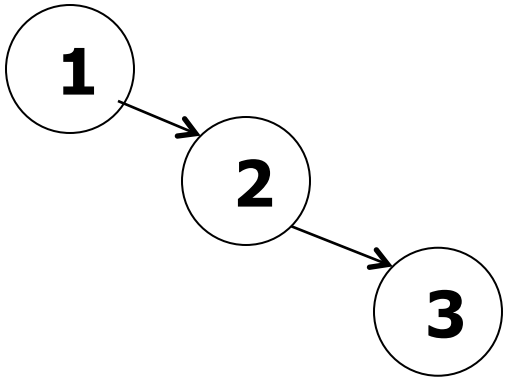
Die Höhe eines binären Suchbaums...

Beispiel: Einfügen in sortierter Reihenfolge



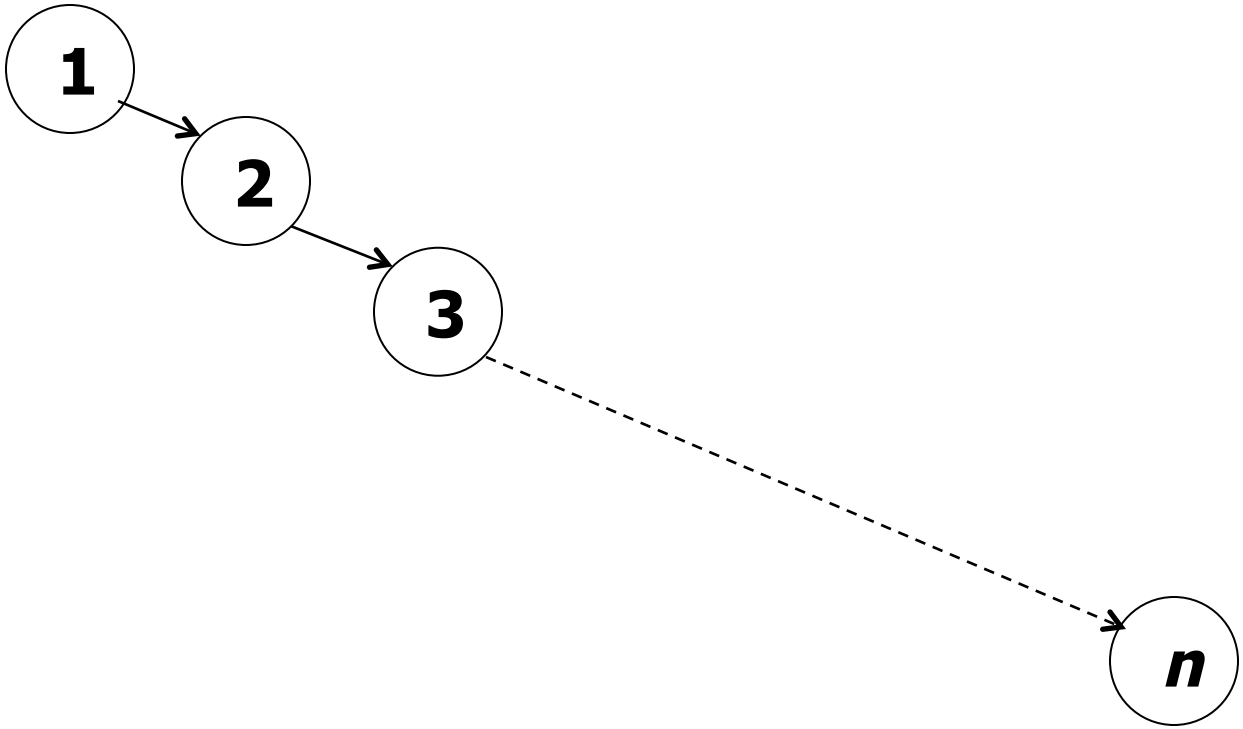
Die Höhe eines binären Suchbaums...

Beispiel: Einfügen in sortierter Reihenfolge

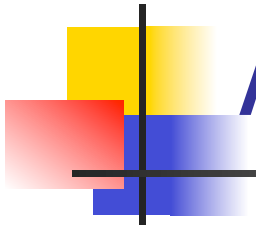


Die Höhe eines binären Suchbaums...

Beispiel: Einfügen in sortierter Reihenfolge



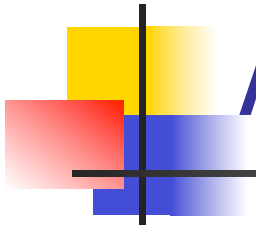
Höhe = *n-1*, Baum sieht aus und verhält sich wie eine Liste.



Abhilfe: Balancierung

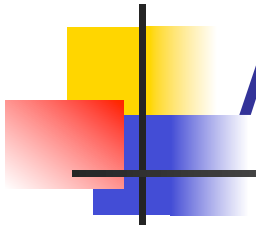
- Beim Einfügen und Löschen stets darauf achten, dass der Baum „balanciert“ ist, (d.h. keine grossen Höhenunterschiede zwischen linken und rechten Teil-bäumen)

Abhilfe: Balancierung

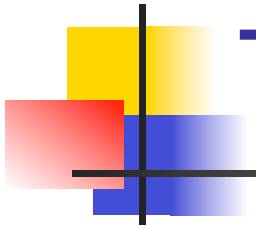


- Beim Einfügen und Löschen stets darauf achten, dass der Baum „balanciert“ ist, (d.h. keine grossen Höhenunterschiede zwischen linken und rechten Teil-bäumen)
- Verschiedene Möglichkeiten (mehr oder weniger kompliziert):
  - AVL-Bäume, Rot-Schwarz-Bäume,...

Abhilfe: Balancierung



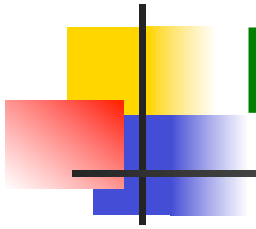
- Beim Einfügen und Löschen stets darauf achten, dass der Baum „balanciert“ ist, (d.h. keine grossen Höhenunterschiede zwischen linken und rechten Teil-bäumen)
- Verschiedene Möglichkeiten (mehr oder weniger kompliziert):
  - AVL-Bäume, Rot-Schwarz-Bäume,...
  - Hier: **Treaps** (randomisierte Suchbäume)



Treap = *Tree + Heap*

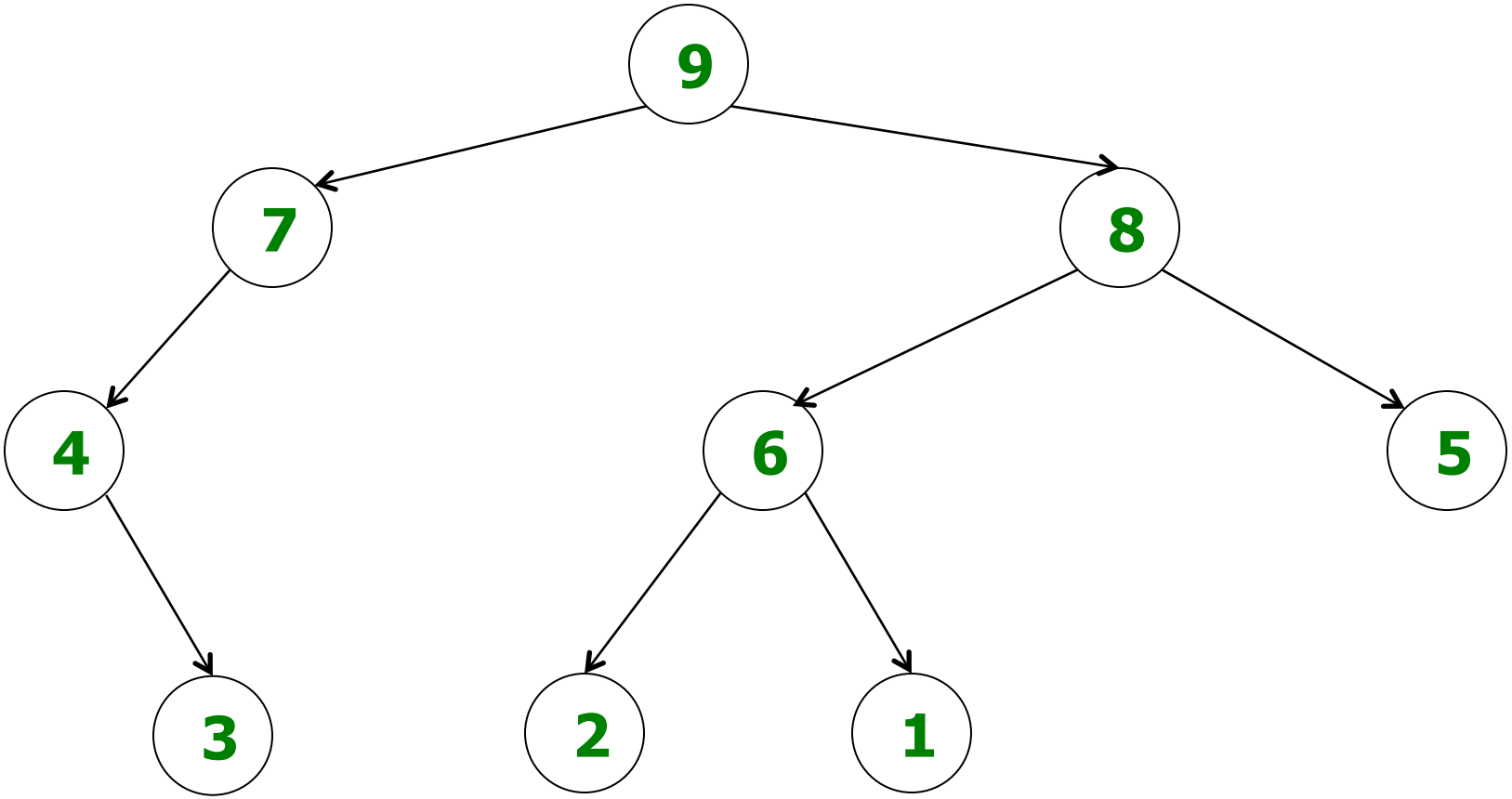
- Ein Binärbaum heisst *Heap*, wenn er leer ist, oder wenn folgende Bedingungen gelten:
  - Sowohl der linke als auch der rechte Teilbaum sind Heaps.
  - Der Schlüssel der Wurzel ist
    - das Maximum aller Schlüssel.

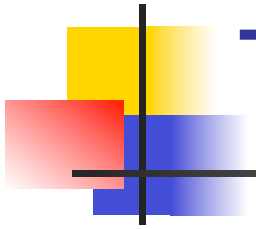
Heap: Schlüssel heissen Prioritäten



- Ein Binärbaum heisst *Heap*, wenn er leer ist, oder wenn folgende Bedingungen gelten:
  - Sowohl der linke als auch der rechte Teilbaum sind Heaps.
  - Die Priorität der Wurzel ist
    - das Maximum aller Prioritäten.

Heap: Beispiel



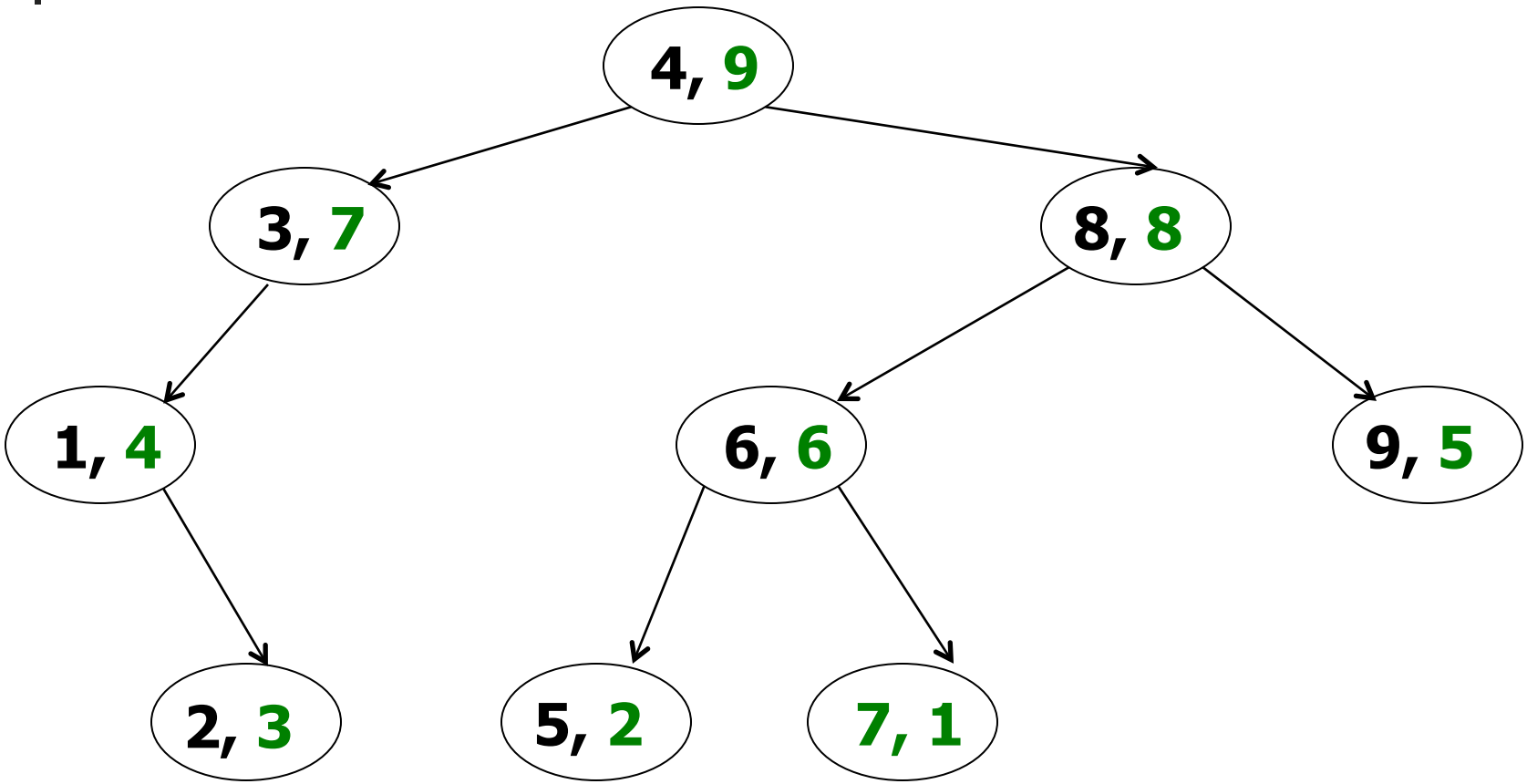


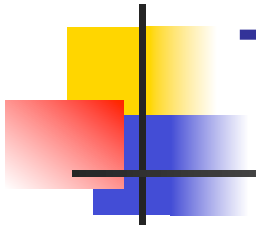
Treaps

- Ein Binärbaum heisst *Treap*, wenn jeder Knoten einen Schlüssel *und* eine Priorität hat, so dass folgende Eigenschaften gelten:
  - Der Baum ist ein binärer Suchbaum bzgl. der Schlüssel.
  - Der Baum ist ein Heap bzgl. der Prioritäten.

Treap: Beispiel

Schlüssel
Prioritäten

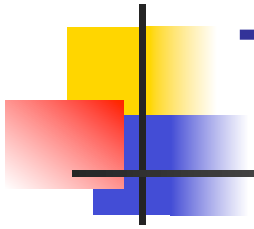




Treaps: Eindeutigkeit

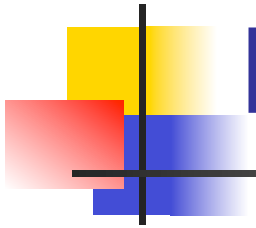
- **Satz:** Für n Knoten mit verschiedenen Schlüsseln *und* Prioritäten gibt es genau einen Treap mit diesen Knoten.

Treaps: Eindeutigkeit



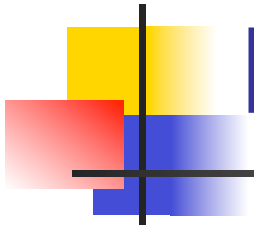
- **Satz:** Für n Knoten mit verschiedenen Schlüsseln *und* Prioritäten gibt es genau einen Treap mit diesen Knoten.
- **Beweis:** Die Wurzel ist der Knoten mit der höchsten Priorität; im linken Teilbaum sind alle Knoten mit kleineren und im rechten Teilbaum alle Knoten mit grösseren Schlüsseln. Mit Induktion sind die Teilbäume auch eindeutig.

Treaps mit *zufälligen* Prioritäten



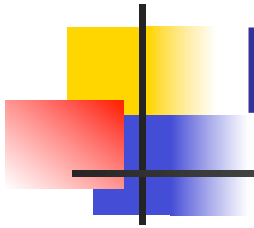
- Wir benutzen einen Treap als binären Suchbaum.

Treaps mit *zufälligen* Prioritäten



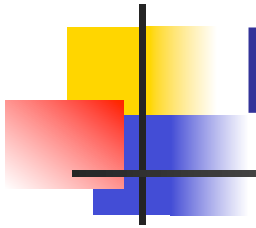
- Wir benutzen einen Treap als binären Suchbaum.
- Beim Einfügen eines neuen Schlüssels wird seine Priorität zufällig gewählt.

Treaps mit *zufälligen* Prioritäten



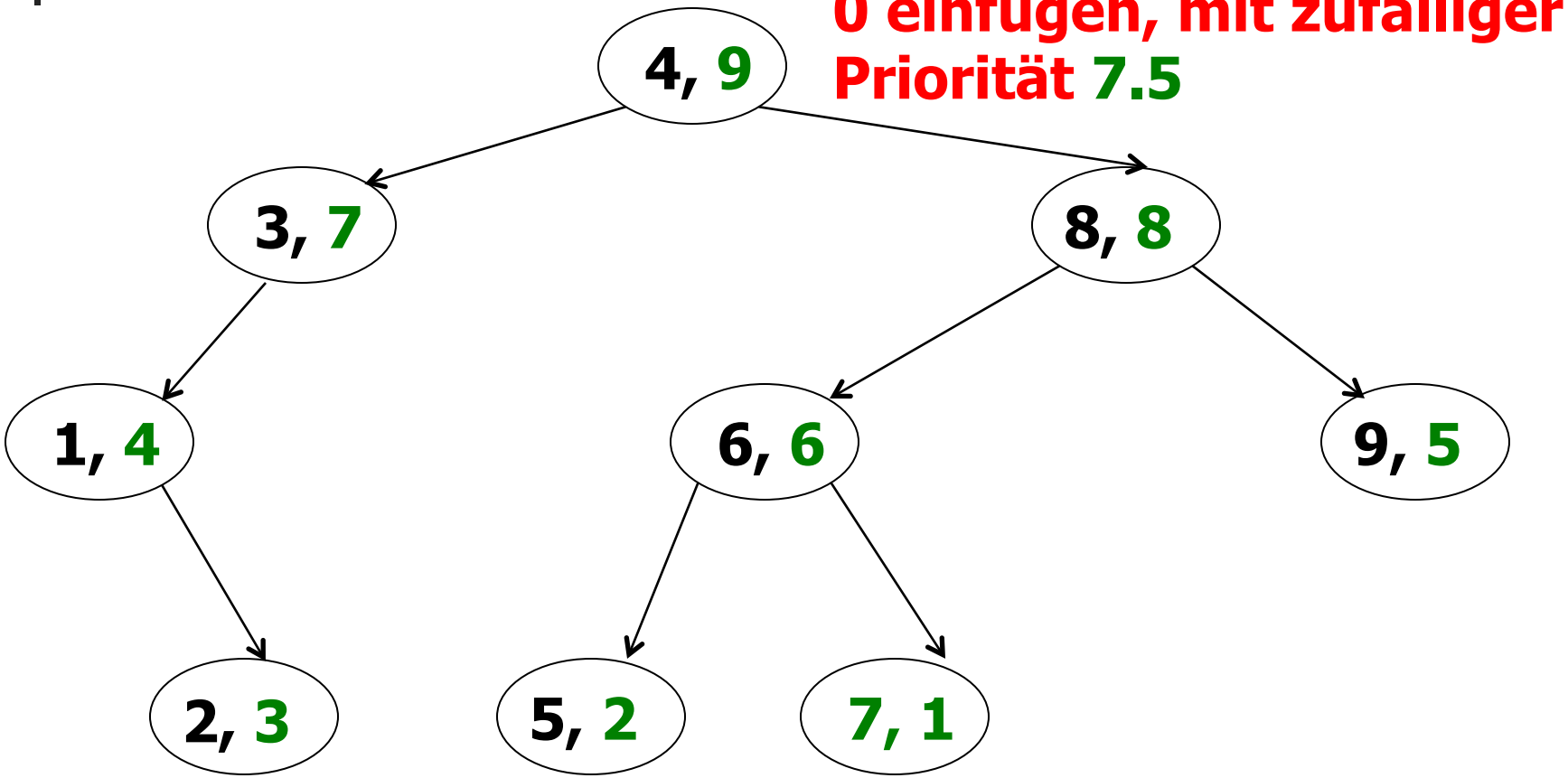
- Wir benutzen einen Treap als binären Suchbaum.
- Beim Einfügen eines neuen Schlüssels wird seine Priorität zufällig gewählt.
- Wie bei normalen binären Suchbäumen: neuer Knoten wird neues Blatt.

Treaps mit *zufälligen* Prioritäten

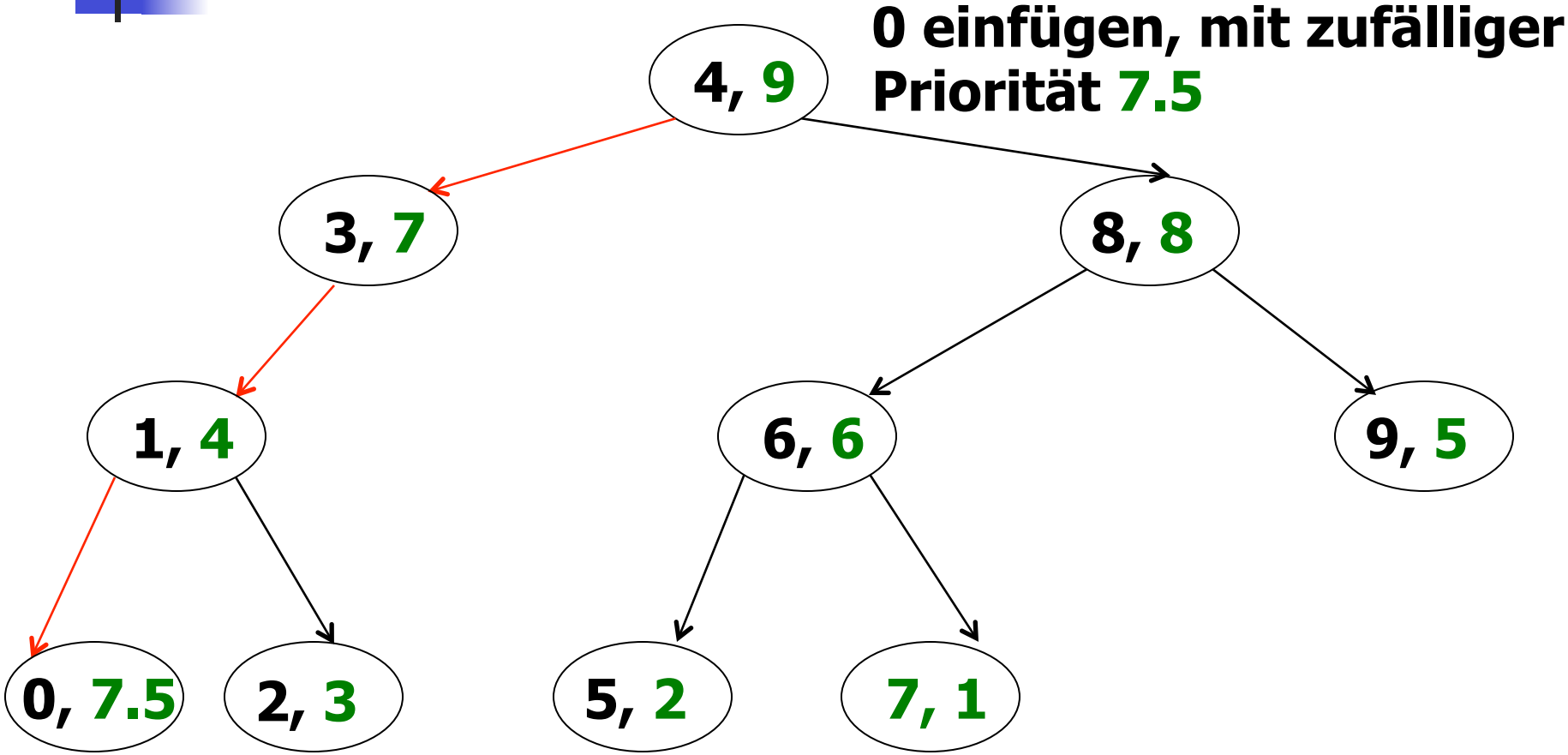


- Wir benutzen einen Treap als binären Suchbaum.
- Beim Einfügen eines neuen Schlüssels wird seine Priorität zufällig gewählt.
- Wie bei normalen binären Suchbäumen: neuer Knoten wird neues Blatt.
- Zusätzlich muss die Treap-Eigenschaft wieder hergestellt werden!

Treaps: Einfügen

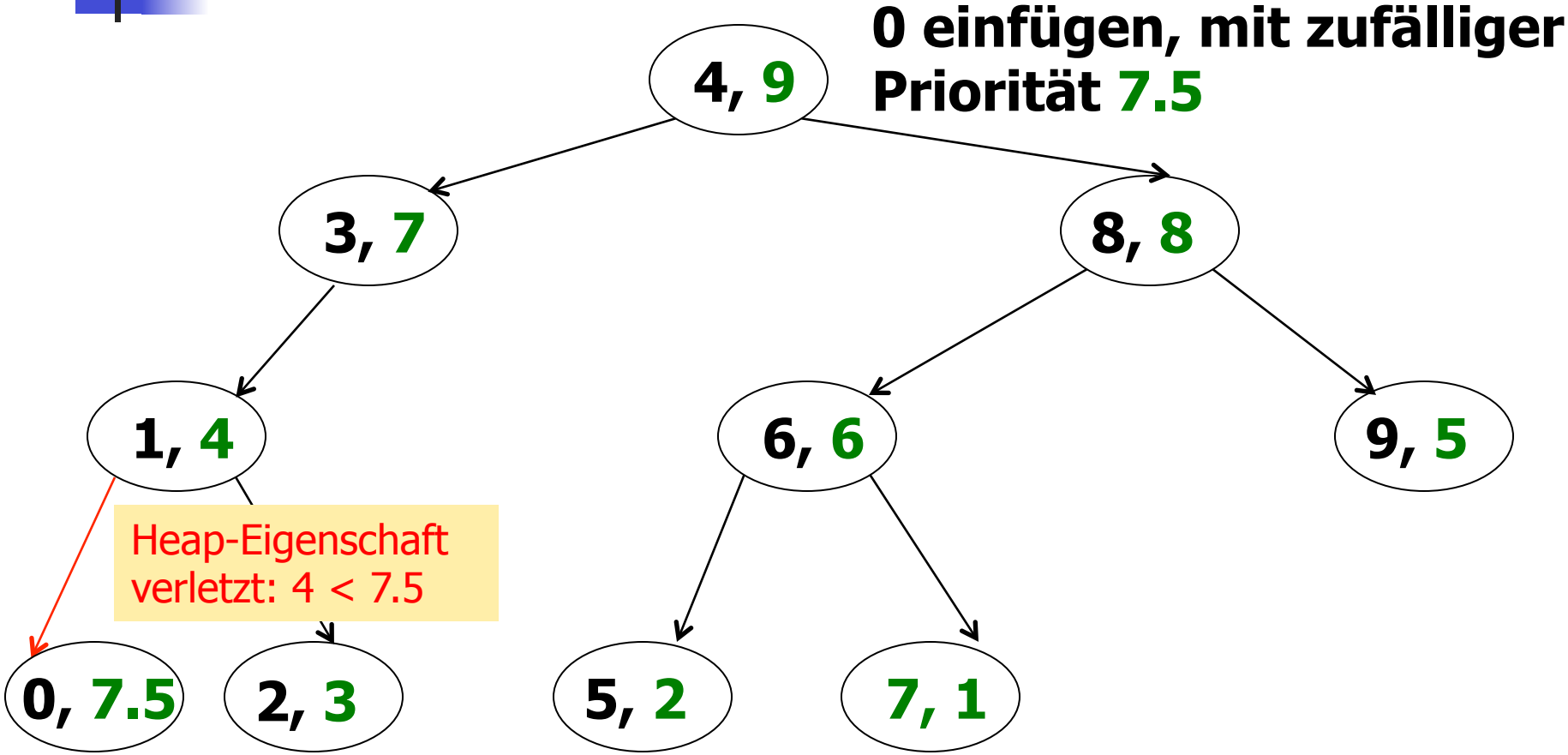


Treaps: Einfügen

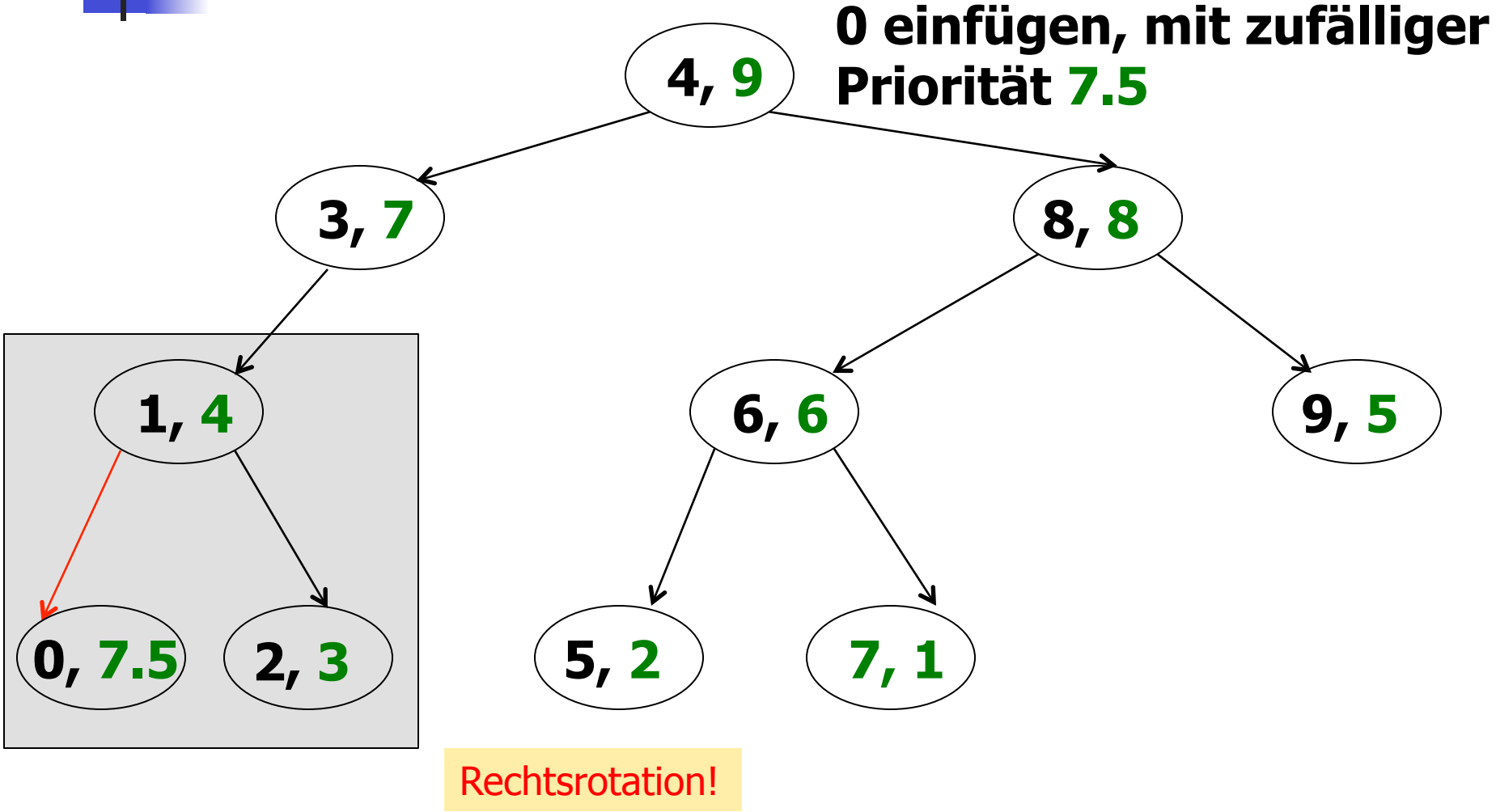


Neues Blatt

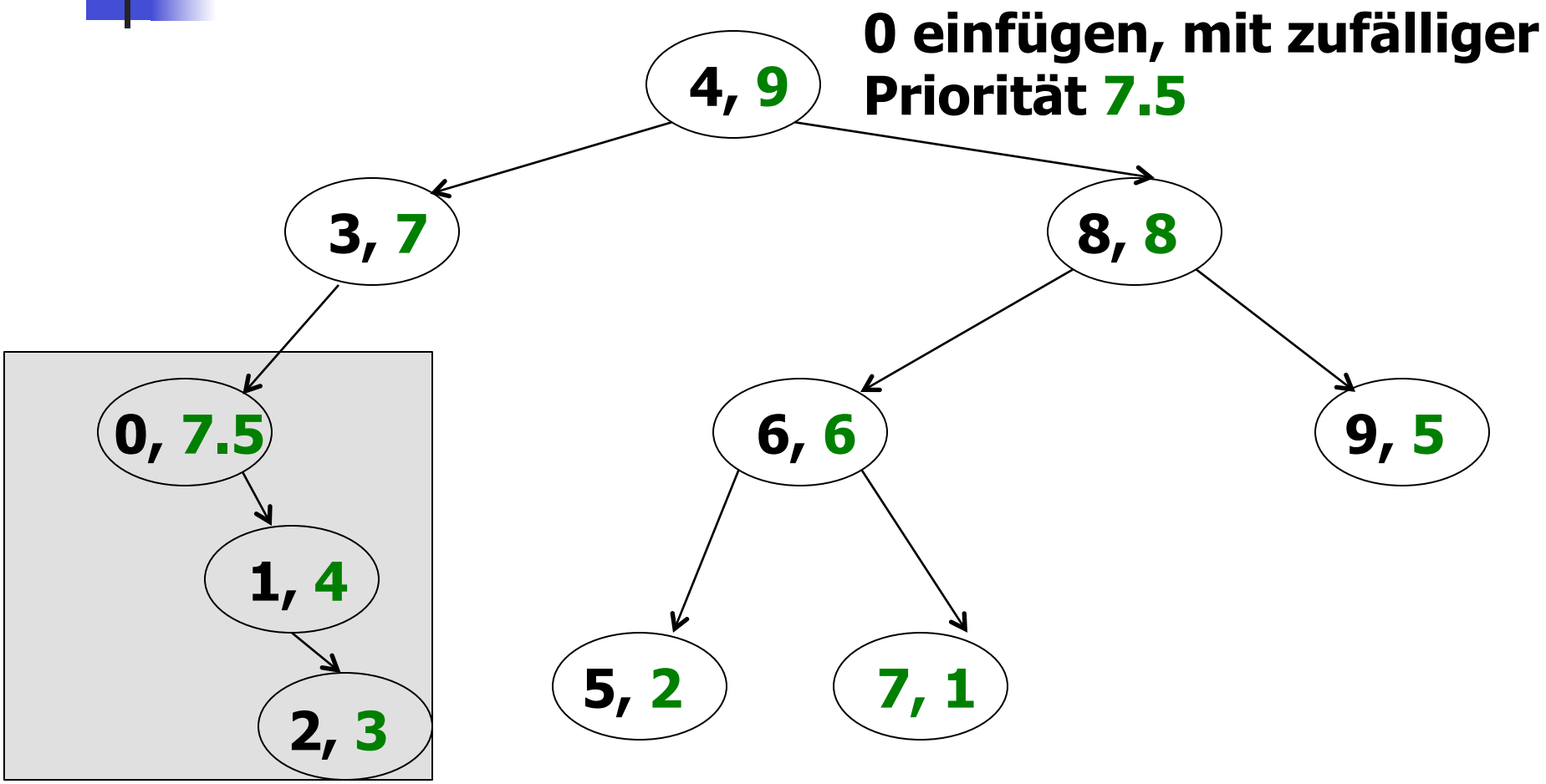
Treaps: Einfügen



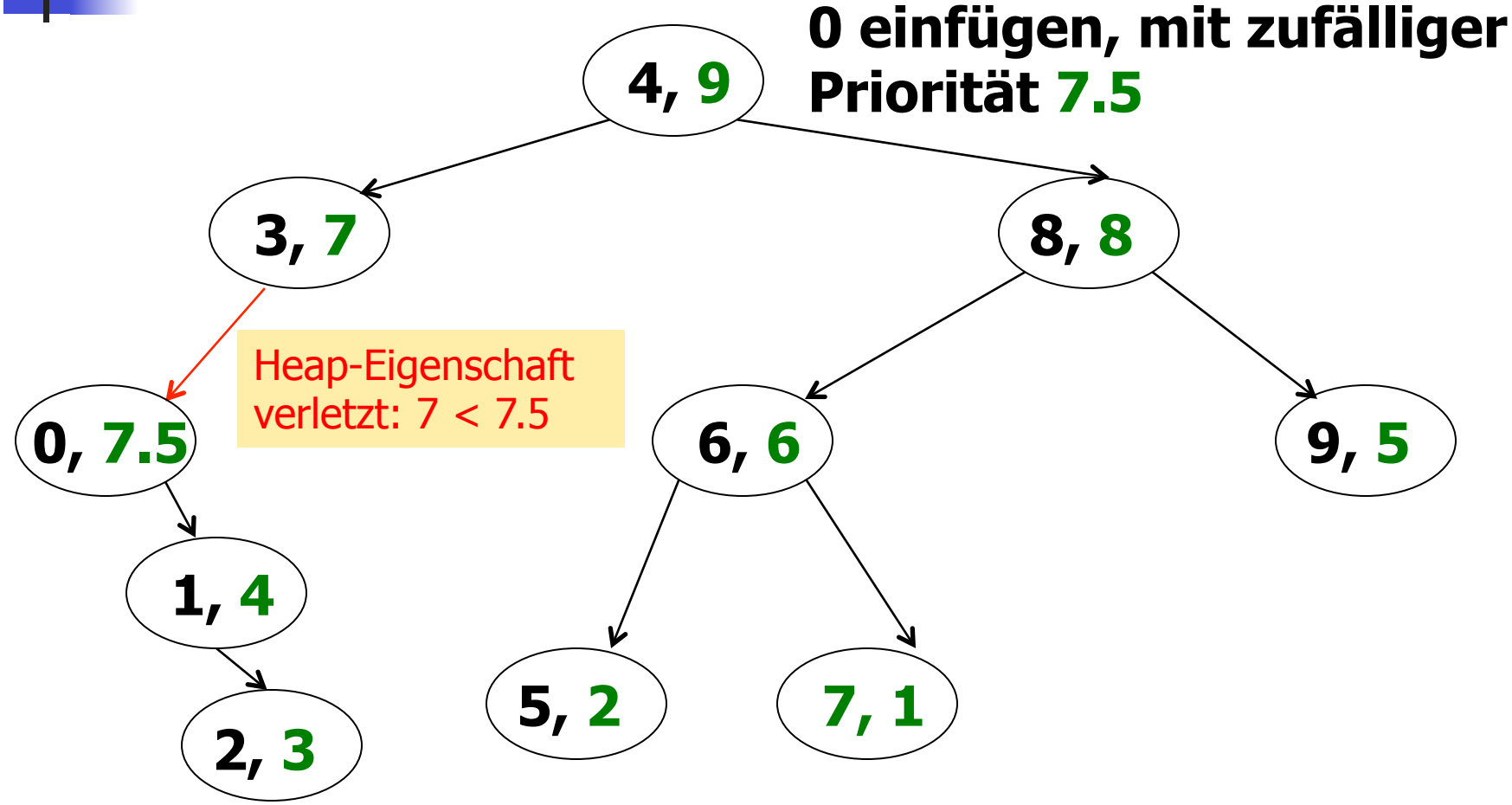
Treaps: Einfügen



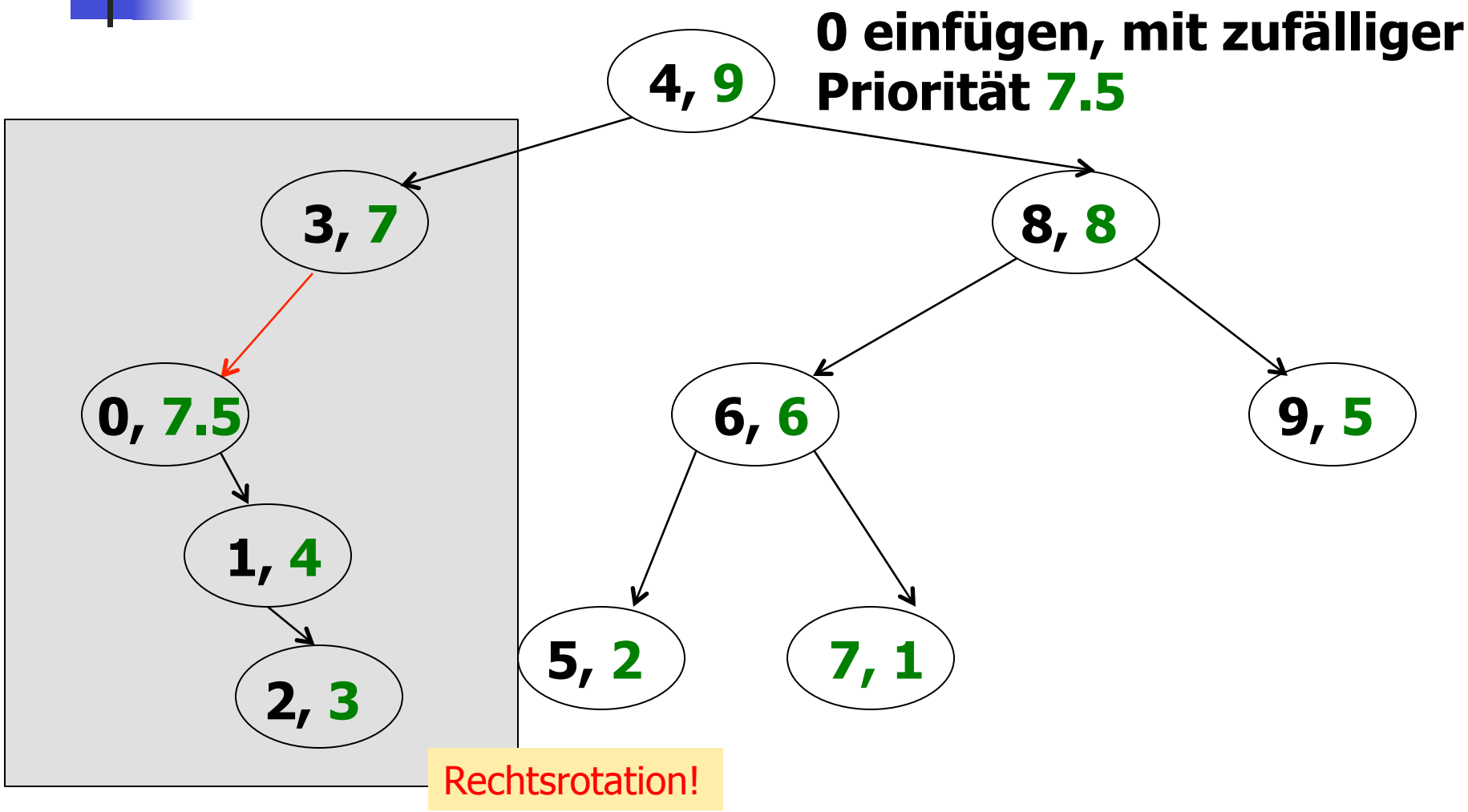
Treaps: Einfügen



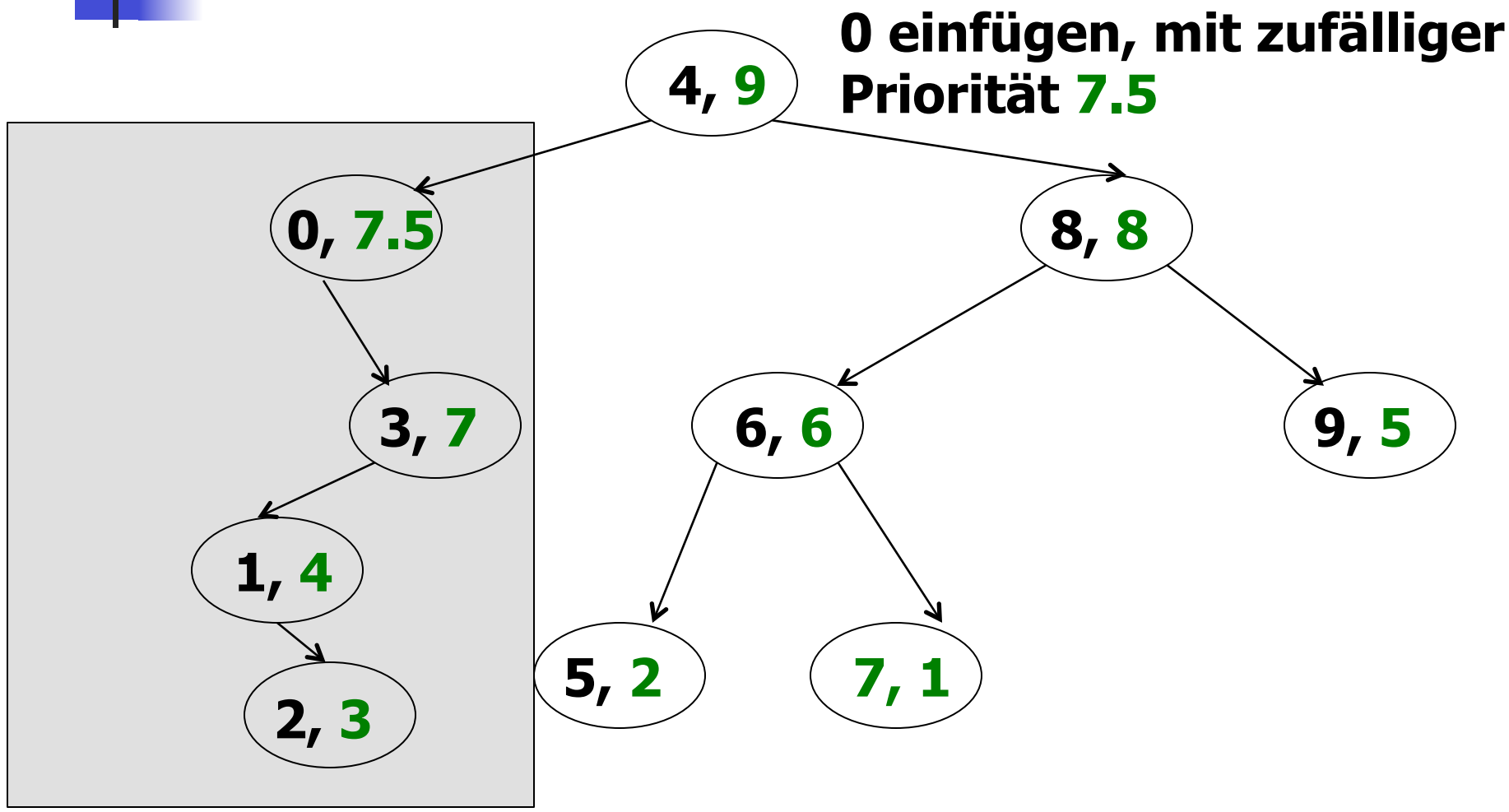
Treaps: Einfügen



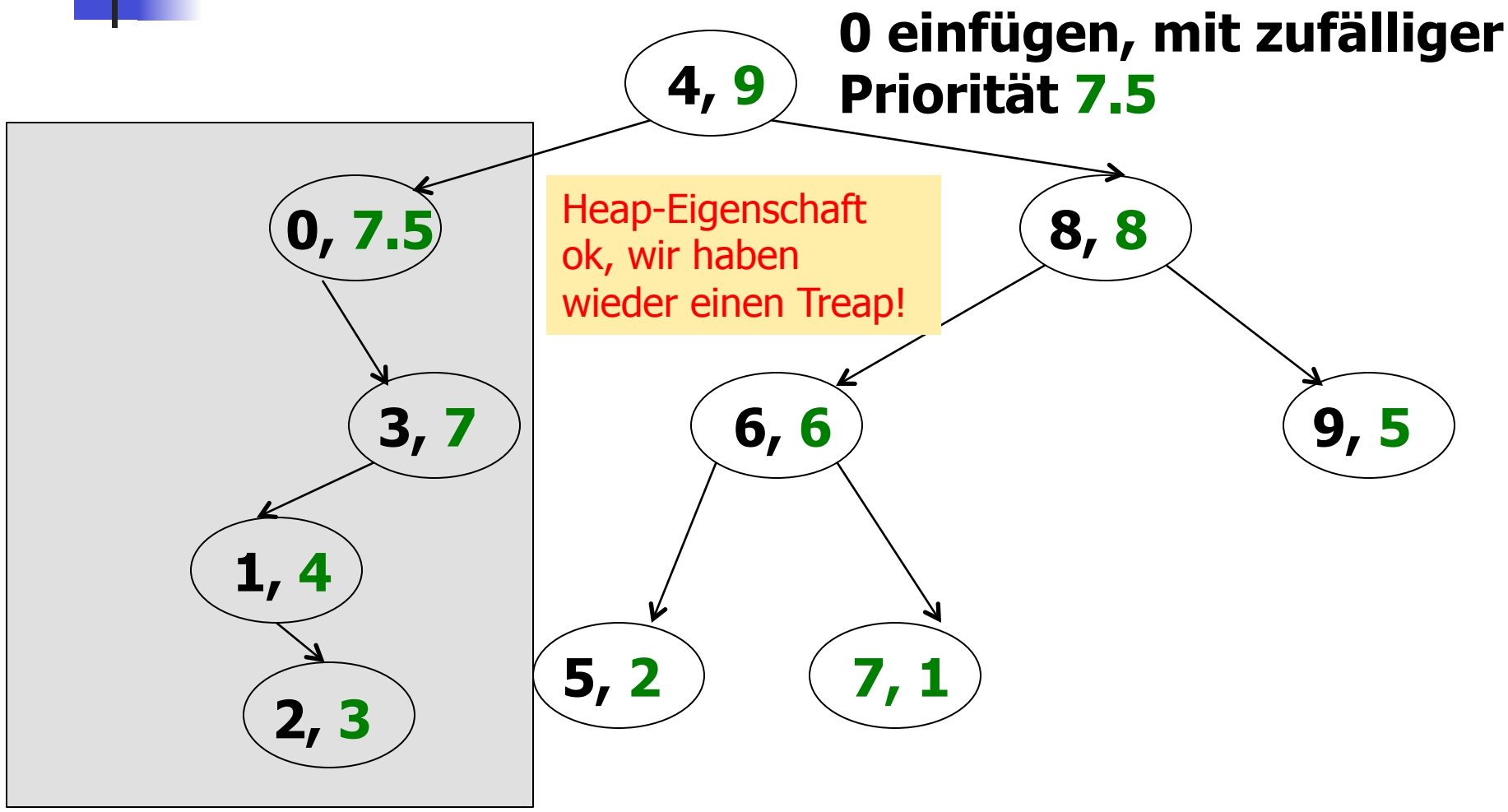
Treaps: Einfügen

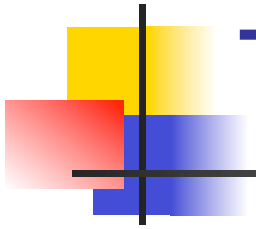


Treaps: Einfügen



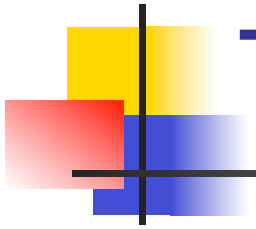
Treaps: Einfügen





Treaps: Löschen

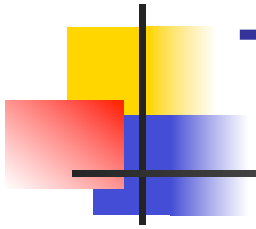
- Element suchen, seinen Knoten durch **Rotationen** zu einem Blatt machen, Blatt löschen!



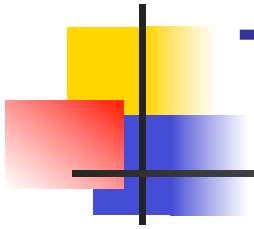
Treaps: Löschen

- Element suchen, seinen Knoten durch **Rotationen** zu einem Blatt machen, Blatt löschen!
- Stets so rotieren, dass der Knoten mit seinem Nachfolger höherer Priorität vertauscht wird. Das erhält die Heap-Eigenschaft.

Treaps: Löschen



- Element suchen, seinen Knoten durch **Rotationen** zu einem Blatt machen, Blatt löschen!
- Stets so rotieren, dass der Knoten mit seinem Nachfolger höherer Priorität vertauscht wird. Das erhält die Heap-Eigenschaft.
- Suchbaum-Eigenschaft gilt wieder nach Löschen des Blatts.



Treaps: Laufzeit

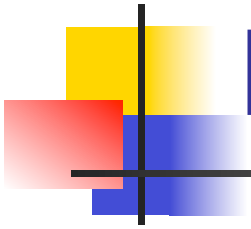
- **Satz** (Seidel, Aragon 1996): In einem Treap über *n* Knoten mit zufälligen Prioritäten ist der zeitliche Aufwand für eine Einfüge-, Lösch- oder Suchoperation im Erwartungswert proportional zu $\log_2 n$.

Mengen: Lösung mit Treaps

- Zur Erinnerung: Suche nach den letzten 100 Elementen in einer **Liste** von 10,000,000 Elementen

```
List l;
for (int i=0; i<10000000; ++i)
    l.push_front(i);

// ...and search for the 100 first ones
for (int i=0; i<100; ++i)
  l.find(i);
```

6.5 Sekunden

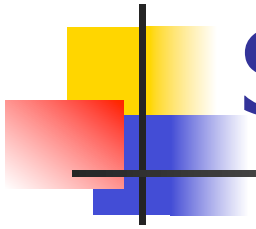


Mengen: Lösung mit Treaps

- Neu: Suche nach den letzten 100 Elementen in einem **Treap** von 10,000,000 Elementen

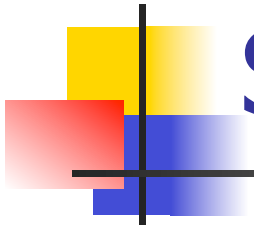
```
Treap t;
for (int i=0; i<10000000; ++i)
  t.insert(i);

// ...and search for the 100 first ones
for (int i=0; i<100; ++i)
  t.find(i);
```

0.017 Sekunden



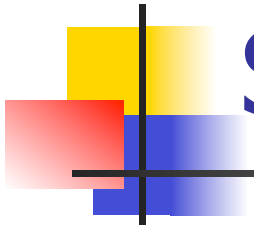
Sortieren mit Treaps

- Folgerung: Durch Einfügen einer Folge von *n* Zahlen in einen Treap mit zufälligen Prioritäten kann die Folge in Zeit proportional zu $n \log_2 n$ sortiert werden.



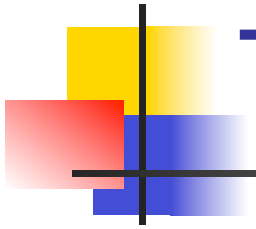
Sortieren mit Treaps

- Folgerung: Durch Einfügen einer Folge von *n* Zahlen in einen Treap mit zufälligen Prioritäten kann die Folge in Zeit proportional zu $n \log_2 n$ sortiert werden.
- Gleicher optimaler Proportionalitätsfaktor wie Mergesort



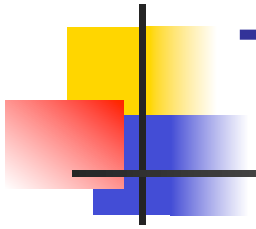
Sortieren mit Treaps

- Folgerung: Durch Einfügen einer Folge von *n* Zahlen in einen Treap mit zufälligen Prioritäten kann die Folge in Zeit proportional zu $n \log_2 n$ sortiert werden.
- Gleicher optimaler Proportionalitätsfaktor wie Mergesort
- Das Treap-basierte Verfahren ist im wesentlichen äquivalent zu Quicksort.



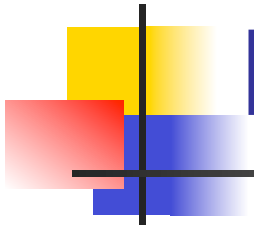
Treaps in C++

- Aehnlich wie bei Listen:
  - Klasse **`TreapNode`** für die Knoten
  - Jeder **`TreapNode`** speichert ausser Schlüssel und Priorität zwei Zeiger auf **`TreapNode`**s (linkes und rechtes **Kind** = Wurzeln des linken und rechten Teilbaums)



Treaps in C++

- Aehnlich wie bei Listen:
  - Klasse **`TreapNode`** für die Knoten
  - Jeder **`TreapNode`** speichert ausser Schlüssel und Priorität zwei Zeiger auf **`TreapNode`**s (linkes und rechtes **Kind** = Wurzeln des linken und rechten Teilbaums)
  - Klasse **`Treap`**; jeder **`Treap`** ist durch einen Zeiger auf den Wurzelknoten repräsentiert.



Die Klasse `TreapNode`

```
class TreapNode
{
public:
  // constructor
  TreapNode( int key, int priority, TreapNode* left = 0, TreapNode* right = 0);

  // Getters
  int get_key() const;
  int get_priority() const;
  const TreapNode* get_left() const;
  const TreapNode* get_right() const;

private:
  int key_;
  double priority_;
  TreapNode* left_;
  TreapNode* right_;
  friend class Treap;
};
```

Die Klasse `TreapNode`

```
class TreapNode
{
public:
  // constructor
  TreapNode( int key, int priority, TreapNode* left = 0, TreapNode* right = 0);

  // Getters
  int get_key() const;
  int get_priority() const;
  const TreapNode* get_left() const;
  const TreapNode* get_right() const;

private:
  int key_;
  double priority_;
  TreapNode* left_;
  TreapNode* right_;
  friend class Treap;
};
```

Wie bei Facebook: Freunde dürfen auf private Daten und Methoden (Mitgliedsfunktionen) zugreifen.

Die Klasse `Treap`
Die „Viererbande“

```
class Treap {
public:
  // default constructor:
  // POST: *this is an empty tree
  Treap();

  // copy constructor
  // POST *this is a copy of other
  Treap(const Treap& other);

  // assignment operator
  // Post: other was assigned to *this
  Treap& operator= (const Treap& other);

  // Destructor
  ~Treap();
…
```

Konstruktor

Copy-Konstruktor

Zuweisungs-operator

Destruktor

Die Klasse `Treap`
Die „Viererbande“ + Wurzel

```
class Treap {
public:
  // default constructor:
  // POST: *this is an empty tree
  Treap();

  // copy constructor
  // POST *this is a copy of other
  Treap(const Treap& other);

  // assignment operator
  // Post: other was assigned to *this
  Treap& operator= (const Treap& other);

  // Destructor
  ~Treap();
private:
 TreapNode* root_;
 …
```

Konstruktor

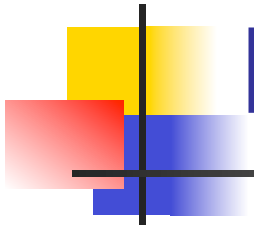
Copy-Konstruktor

Zuweisungs-operator

Destruktor

Zeiger auf die Wurzel (0: leerer Treap)

Die Klasse `Treap` Einfügen



```
void Treap::insert(const int key)
{
  insert (root_, key, std::rand());
}
```

Die Klasse `Treap` Einfügen

```
void Treap::insert(const int key)
{
   insert (root_, key, std::rand());
}
```

private Hilfsfunktion

Zufällige Priorität

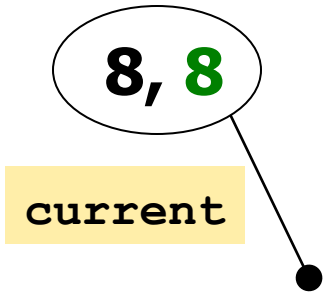
Die Klasse `Treap` Einfügen

```
// PRE: current is a pointer in *this
// POST: a new TreapNode with key and priority is inserted into the
//       subtree hanging off current
void Treap::insert (TreapNode*& current, const int key, const int priority)
{
  if (current == 0)
    current = new TreapNode (key, priority);
  else
    if (key < current->key_) {
      insert (current->left_, key, priority);
      if (priority > current->get_priority())
         rotate_right (current);
    }
    else {
      insert (current->right_, key, priority);
      if (priority > current->get_priority())
         rotate_left (current);
    }
}
```

Die Klasse `Treap` Einfügen

```
// PRE: current is a pointer in *this
// POST: a new TreapNode with key and priority is inserted into the
//       subtree hanging off current                    9,        10
void Treap::insert (TreapNode*& current, const int key, const int priority)
{
  if (current == 0)
    current = new TreapNode (key, priority);
  else
    if (key < current->key_) {
      insert (current->left_, key, priority);
      if (priority > current->get_priority())
         rotate_right (current);
    }
    else {
      insert (current->right_, key, priority);
      if (priority > current->get_priority())
         rotate_left (current);
    }
}
```

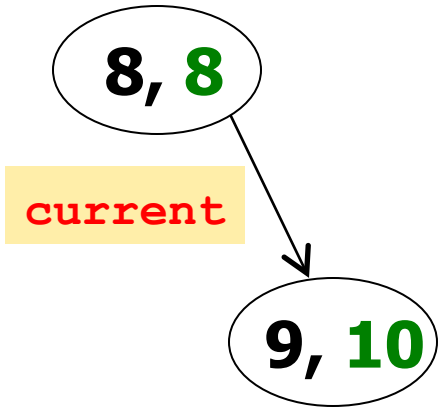
`current` verweist auf eine leere Blattposition.



Die Klasse `Treap` Einfügen

```
// PRE: current is a pointer in *this
// POST: a new TreapNode with key and priority is inserted into the
//       subtree hanging off current                    9,        10
void Treap::insert (TreapNode*& current, const int key, const int priority)
{
  if (current == 0)
    current = new TreapNode (key, priority);
  else
    if (key < current->key_) {
      insert (current->left_, key, priority);
      if (priority > current->get_priority())
         rotate_right (current);
    }
    else {
      insert (current->right_, key, priority);
      if (priority > current->get_priority())
         rotate_left (current);
    }
}
```

`current` verweist auf eine leere Blattposition.

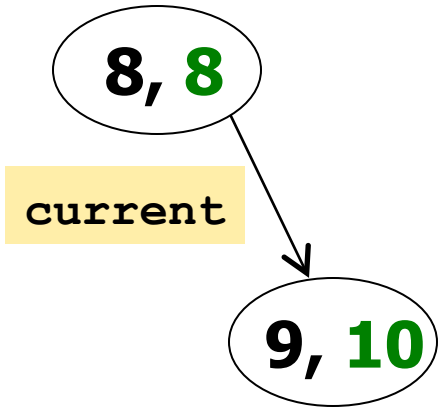


Die Klasse `Treap` Einfügen

```
// PRE: current is a pointer in *this
// POST: a new TreapNode with key and priority is inserted into the
//       subtree hanging off current
void Treap::insert (TreapNode*& current, const int key, const int priority)
{
  if (current == 0)
    current = new TreapNode (key, priority);
  else
    if (key < current->key_) {
      insert (current->left_, key, priority);
      if (priority > current->get_priority())
         rotate_right (current);
    }
    else {
      insert (current->right_, key, priority);
      if (priority > current->get_priority())
         rotate_left (current);
    }
}
```

9, 10

`current` verweist auf eine leere Blattposition.

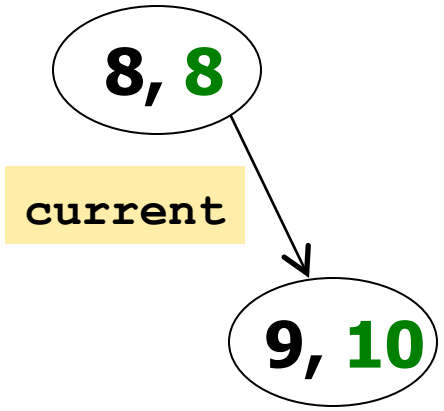


Damit das klappt, muss `current` ein Alias des entsprechenden Zeigers im Baum sein, keine Kopie!

Die Klasse `Treap` Einfügen

```
// PRE: current is a pointer in *this
// POST: a new TreapNode with key and priority is inserted into the
//       subtree hanging off current                    9,        10
void Treap::insert (TreapNode*& current, const int key, const int priority)
{
  if (current == 0)
    current = new TreapNode (key, priority);
  else
    if (key < current->key_) {
      insert (current->left_, key, priority);
      if (priority > current->get_priority())
        rotate_right (current);
    }
    else {
      insert (current->right_, key, priority);
      if (priority > current->get_priority())
        rotate_left (current);
    }
}
```

`current` verweist auf eine leere Blattposition.

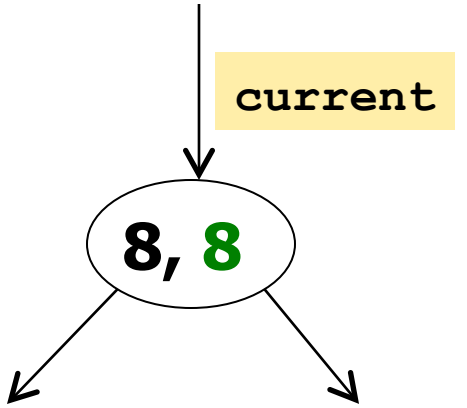


Heap-Eigenschaft ist noch verletzt; das wird „weiter oben" in der Rekursion repariert.

Die Klasse `Treap` Einfügen

```
// PRE: current is a pointer in *this
// POST: a new TreapNode with key and priority is inserted into the
//       subtree hanging off current                    9,        10
void Treap::insert (TreapNode*& current, const int key, const int priority)
{
  if (current == 0)
    current = new TreapNode (key, priority);
  else   9   8
    if (key < current->key_) {
      insert (current->left_, key, priority);
      if (priority > current->get_priority())
         rotate_right (current);
    }
    else {
      insert (current->right_, key, priority);
      if (priority > current->get_priority())
         rotate_left (current);
    }
}
```

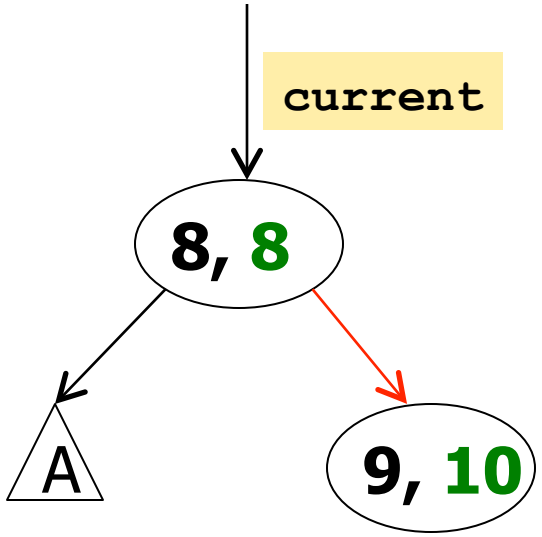
`current` verweist auf einen Knoten.



Die Klasse `Treap` Einfügen

```
// PRE: current is a pointer in *this
// POST: a new TreapNode with key and priority is inserted into the
//       subtree hanging off current                    9,        10
void Treap::insert (TreapNode*& current, const int key, const int priority)
{
  if (current == 0)
    current = new TreapNode (key, priority);
  else
    if (key < current->key_) {
      insert (current->left_, key, priority);
      if (priority > current->get_priority())
         rotate_right (current);
    }
    else {
      insert (current->right_, key, priority);
      if (priority > current->get_priority())
         rotate_left (current);
    }
}
```

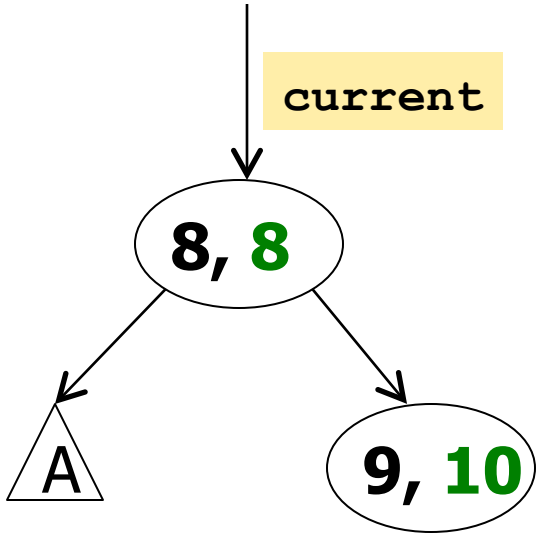
current verweist auf einen Knoten.



Die Klasse `Treap` Einfügen

```
// PRE: current is a pointer in *this
// POST: a new TreapNode with key and priority is inserted into the
//       subtree hanging off current                    9,        10
void Treap::insert (TreapNode*& current, const int key, const int priority)
{
  if (current == 0)
    current = new TreapNode (key, priority);
  else
    if (key < current->key_) {
      insert (current->left_, key, priority);
      if (priority > current->get_priority())
         rotate_right (current);
    }
    else {10      8
      insert (current->right_, key, priority);
      if (priority > current->get_priority())
         rotate_left (current);
    }
}
```

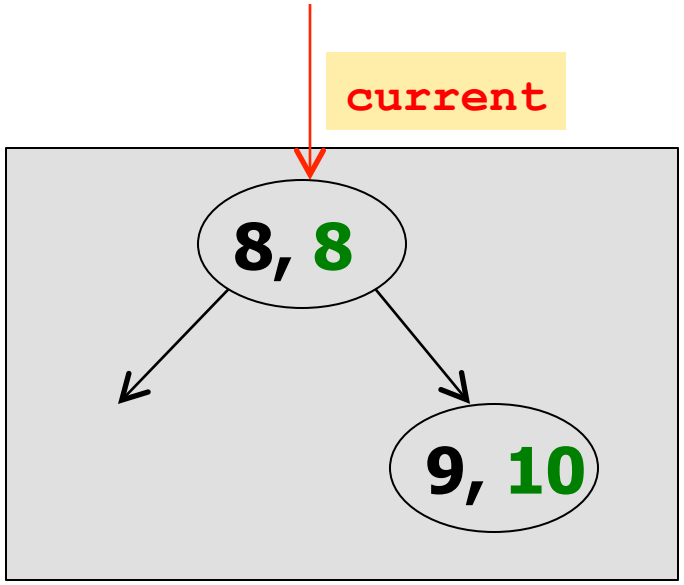
`current` verweist auf einen Knoten.



Die Klasse `Treap` Einfügen

```
// PRE: current is a pointer in *this
// POST: a new TreapNode with key and priority is inserted into the
//       subtree hanging off current                    9,        10
void Treap::insert (TreapNode*& current, const int key, const int priority)
{
  if (current == 0)
    current = new TreapNode (key, priority);
  else
    if (key < current->key_) {
      insert (current->left_, key, priority);
      if (priority > current->get_priority())
         rotate_right (current);
    }
    else {
      insert (current->right_, key, priority);
      if (priority > current->get_priority())
         rotate_left (current);
    }
}
```

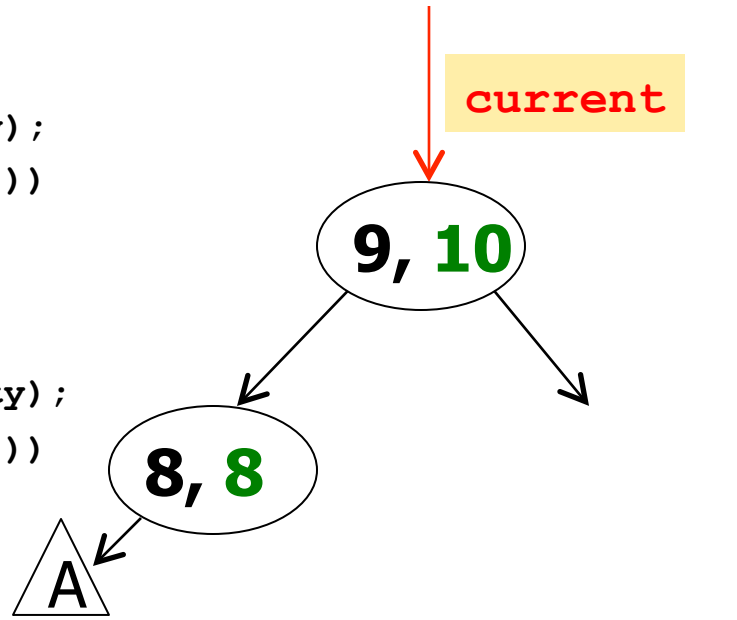
`current` verweist auf einen Knoten.



Die Klasse `Treap` Einfügen

```
// PRE: current is a pointer in *this
// POST: a new TreapNode with key and priority is inserted into the
//       subtree hanging off current                    9,        10
void Treap::insert (TreapNode*& current, const int key, const int priority)
{
  if (current == 0)
    current = new TreapNode (key, priority);
  else
    if (key < current->key_) {
      insert (current->left_, key, priority);
      if (priority > current->get_priority())
         rotate_right (current);
    }
    else {
      insert (current->right_, key, priority);
      if (priority > current->get_priority())
         rotate_left (current);
    }
}
```

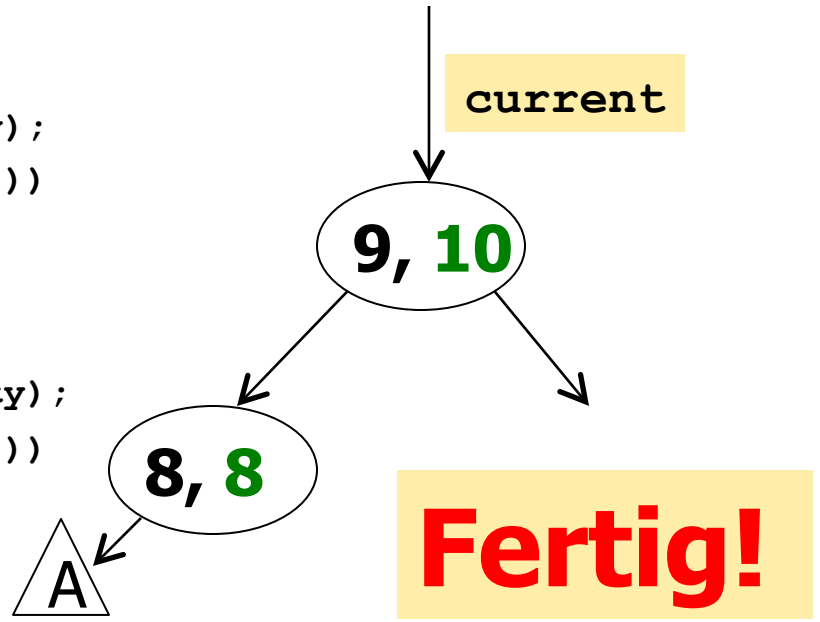
current verweist auf einen Knoten.



Die Klasse `Treap` Einfügen

```
// PRE: current is a pointer in *this
// POST: a new TreapNode with key and priority is inserted into the
//       subtree hanging off current                    9,        10
void Treap::insert (TreapNode*& current, const int key, const int priority)
{
  if (current == 0)
    current = new TreapNode (key, priority);
  else
    if (key < current->key_) {
      insert (current->left_, key, priority);
      if (priority > current->get_priority())
         rotate_right (current);
    }
    else {
      insert (current->right_, key, priority);
      if (priority > current->get_priority())
         rotate_left (current);
    }
}
```

current verweist auf einen Knoten.



Fertig!